

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ряды. Операционное исчисление.
Интегральное исчисление ФНП.

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

студента(-ки) _____ курса _____ факультета

группы № _____

направления _____

Ставрополь
2021

УДК 52-17:330(076)
ББК 65в6я73
Г33

Авторский коллектив:

*Татьяна Александровна Гулай
Анна Федоровна Долгополова
Виктория Артемовна Жукова
Светлана Васильевна Мелешко
Ирина Алексеевна Невидомская*

Математические методы в экономических исследованиях: рабочая тетрадь/ Т.А.Гулай, А.Ф. Долгополова, В.А.Жукова, С.В.Мелешко, И.А.Невидомская – Ставрополь: 2021. – 130 с.

Рабочая тетрадь входит в серию методических разработок для студентов электроэнергетического факультета, призванных способствовать овладению студентами теоретическими основами материала и появлению у них навыков решения задач по применению математических методов в инженерных задачах.

УДК 52-17:330(076)
ББК 65в6я73
Г33

ГЛАВА 7 РЯДЫ

7.1 Числовые ряды

Пусть $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ бесконечная числовая последовательность.

Выражение вида $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ (7.1)

называется числовым рядом (или просто рядом), а числа $u_1, u_2, u_3, \dots$ называются членами ряда; u_n при произвольном n называется общим членом ряда (иногда первый член ряда обозначают u_0 , второй — u_1 и т. д., то есть придают n значения $0, 1, 2, \dots$). Ряд часто записывают $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Числовой ряд задан, если известен его общий член u_n , или известен закон, по которому он может быть получен.

Сумму первых n членов числового ряда обозначают через S_n и называют *частичной суммой* ряда :

$$S_1 = u_1; \quad S_2 = u_1 + u_2; \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3; \quad S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n. \quad (7.2)$$

Определение Ряд (7.1) называется сходящимся, если n -я частичная сумма S_n при неограниченном возрастании n стремится к конечному пределу, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, где S называется суммой ряда (7.1).

Если же n -я частичная сумма ряда при $n \rightarrow \infty$ не стремится к конечному пределу или вообще не имеет никакого предела, то ряд называется расходящимся.

Ряд $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ (7.3)

называется геометрической прогрессией, a - первый член ряда; q – знаменатель прогрессии, сумма ряда $S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$.

При $|q| < 1$ ряд (7.3) сходится, его сумма равна $S = \frac{a}{1 - q}$ и при $|q| \geq 1$ ряд (7.3) расходится.

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ (7.4)

называется гармоническим рядом, он расходится.

Ряд $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ (7.5)

называется обобщенным гармоническим рядом, при $p > 1$ этот ряд сходится, а при $p \leq 1$ он расходится.

Необходимое условие сходимости ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член u_n стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$,

то есть
$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (7.6)$$

Если общий член ряда u_n не стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, то ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости рядов

1. Признаки сравнения

Пусть даны два ряда с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (*)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (**)$$

1) Если члены ряда (*) не превосходят соответствующих членов ряда (**), т. е. $u_n \leq v_n$ и ряд (**) сходится, то сходится и ряд (*).

2) Если члены ряда (*) не меньше соответствующих членов ряда (**), т. е. $u_n \geq v_n$ и ряд (**) расходится, то расходится и ряд (*).

Этот признак остаётся в силе, если неравенства $u_n < v_n$ ($u_n > v_n$) выполняются не при всех n , а лишь начиная с некоторого номера $n = N$.

2. Предельный признак сравнения

Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ ($0 < A < \infty$), то оба

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и расходятся одновременно.

3. Признак Даламбера

Если для знакоположительного ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то если $l < 1$ ряд сходится, если же $l > 1$, то ряд расходится.

Если $l = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться. В этом случае признак Даламбера ответа не дает, приходится исследовать на сходимость ряд с помощью других признаков.

4. Признак Коши (Радикальный признак)

Если для знакоположительного ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то если $l < 1$, то ряд сходится, если $l > 1$, то ряд расходится.

Если $l = 1$, то радикальный признак ответа не дает.

5. Признак Коши. (Интегральный признак).

Пусть члены знакоположительного ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$ и $f(x)$ такая непрерывная невозрастающая на промежутке $[1; +\infty)$ функция, что $f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n, \dots$

Тогда, если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то и ряд сходится, а если он расходится, то и ряд расходится.

Решение типовых примеров

7.1 Дан общий член ряда $u_n = \frac{2n-1}{3^n}$. Написать первые четыре члена ряда.

Решение

Если $n=1$, то $u_1 = \frac{1}{3}$; если $n=2$, то $u_2 = \frac{3}{9}$; если $n=3$, то $u_3 = \frac{5}{27}$; если $n=4$, то $u_4 = \frac{7}{81}$; Ряд можно записать в виде $\frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{5}{27} + \frac{7}{81} + \dots$

7.2 Найти общий член ряда $\frac{4}{2} + \frac{16}{4} + \frac{64}{6} + \frac{256}{8} + \dots$

Решение

Числители образуют геометрическую прогрессию $4, 4^2, 4^3, 4^4, \dots$; n -й член этой прогрессии $b_n = 4^n$. Знаменатели образуют арифметическую прогрессию $2, 4, 6, 8, \dots$; n -й член этой прогрессии находим по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$, где $a_1 = 2$, $d = 2$, поэтому $a_n = 2n$. Следовательно, общий член этого ряда $u_n = \frac{4^n}{2n}$.

7.3 Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$.

Решение

Представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей:

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 5n + 6} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$
$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3}$$

Умножая обе части этого выражения на знаменатель, придём к тождеству

$$1 \equiv A(n+3) + B(n+2).$$

Полагая $n = -2$, находим $1 = A$; значит $A = 1$;

$n = -3$, находим $1 = -B$; значит $B = -1$.

Таким образом, $u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$, т.е. $u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$.

Отсюда $u_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; $u_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$; $u_3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$; $u_4 = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$;

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}.$$

Так как $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3}$, то ряд сходится и его сумма

равна $\frac{1}{3}$.

7.4 Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4}$.

Решение

Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ (то есть с бесконечно убывающей геометрической прогрессией, так как $q = \frac{1}{3} < 1$), этот ряд сходится.

Члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, следовательно, данный ряд сходится.

7.5 Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 2^n - 3}$.

Решение

Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ($q = \frac{1}{2} < 1$, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия). Применим предельный признак сравнения рядов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{4 \cdot 2^n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 - \frac{3}{2^n}} = \frac{1}{4}.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится, то сходится и данный ряд.

7.6 Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{3n-1} + \dots$

Решение

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (расходится).

Воспользуемся предельным признаком сравнения $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$.

Следовательно, данный ряд расходится.

7.7 Исследовать сходимость ряда $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \frac{2^4}{4^{10}} + \dots + \frac{2^n}{n^{10}} + \dots$

Решение

Применим признак Даламбера: имеем $u_n = \frac{2^n}{n^{10}}$, $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}$.

Тогда $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot n^{10}}{(n+1)^{10} \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n^{10}}{(n+1)^{10}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^{10}} = 2$.

Так как $l > 1$, то данный ряд расходится.

7.8 Исследовать сходимость ряда

$$\frac{10}{1!} + \frac{10^2}{3!} + \frac{10^3}{5!} + \frac{10^4}{7!} + \dots + \frac{10^n}{(2n-1)!} + \dots$$

Решение

Применим признак Даламбера: имеем $u_n = \frac{10^n}{(2n-1)!}$,

$$u_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(2(n+1)-1)!} = \frac{10^{n+1}}{(2n+2-1)!} = \frac{10^{n+1}}{(2n+1)!}.$$

Тогда $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{n+1}(2n-1)!}{(2n+1)!10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{2n(2n+1)} = 0$

Так как $l < 1$, то данный ряд сходится.

7.9 Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$.

Решение

Здесь удобнее применить радикальный признак Коши, поскольку

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n.$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{3}, \text{ так как } l < 1, \text{ то данный}$$

ряд сходится.

7.10 Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$.

Решение

Воспользуемся интегральным признаком Коши:

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1}, \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1|_1^{\infty} = \infty.$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и данный ряд.

Задания для решения в аудитории

7.11 Записать 4-5 первых членов ряда, по известному общему члену U_n .

а) $U_n = \frac{3n-2}{n^2+1};$

б) $U_n = \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2};$

в) $U_n = \frac{n^3}{e^n};$

г) $U_n = \frac{1}{(2n-1)3^{n-1}};$

д) $U_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$

е) $U_n = \frac{n^2}{n!}.$

7.12 Написать простейшую формулу n – го члена ряда по указанным членам

а) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots;$

б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots;$

в) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots;$

г) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots;$

д) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots;$

е) $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots;$

ж) $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots;$

з) $\frac{1}{2+3} + \frac{1}{4+3} + \frac{1}{8+3} + \frac{1}{16+3} + \dots;$

и) $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$

7.13 Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости рядов

а) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{2n}{2n+1} + \dots;$

б) $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \dots + \frac{2n-1}{n^2} + \dots;$

$$\begin{array}{ll}
 \text{в)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}; & \text{г)} \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{2n-1}{2n} + \dots; \\
 \text{д)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}; & \text{е)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}; \\
 \text{ж)} \quad 2 + \frac{5}{8} + \frac{10}{27} + \dots + \frac{n^2+1}{n^3} + \dots; & \text{з)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}.
 \end{array}$$

7.14 Найти сумму n – первых членов ряда (S_n) , доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости и найти сумму ряда S

$$\begin{array}{l}
 \text{а)} \quad \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots; \\
 \text{б)} \quad \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots; \\
 \text{в)} \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots; \\
 \text{г)} \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots.
 \end{array}$$

7.15 Исследовать на сходимость по признаку сравнения

$$\begin{array}{l}
 \text{а)} \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 27} + \dots + \frac{1}{n \cdot 3^n} + \dots; \\
 \text{б)} \quad \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots; \\
 \text{в)} \quad \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots; \\
 \text{г)} \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots; \\
 \text{д)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 1}{9^n + 3}.
 \end{array}$$

7.16 Исследовать на сходимость, используя признак Даламбера

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} \quad 1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots; & \text{б)} \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots; \\
 \text{в)} \quad 1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots; & \text{г)} \quad 1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots; \\
 \text{д)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{5^n \cdot n}.
 \end{array}$$

7.17 Исследовать на сходимость, используя радикальный признак Коши

$$\text{а) } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n; \quad \text{г) } \sum_{i=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{2n};$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+1}{2n^2-1} \right)^n.$$

7.18 Исследовать на сходимость, используя интегральный признак Коши

$$\text{а) } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{i}} + \dots; \quad \text{б) } 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots;$$

$$\text{в) } 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \dots; \quad \text{г) } \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + \dots;$$

$$\text{д) } \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{3\ln^2 3} + \frac{1}{4\ln^2 4} + \dots.$$

Задания для самостоятельного решения

Исследовать сходимость рядов:

$$\text{7.19} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n + 2}.$$

$$\text{7.20} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+2}}.$$

$$\text{7.21} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10}{11} \right)^n \cdot n^5.$$

$$\text{7.22} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{6^n}.$$

$$\text{7.23} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}.$$

$$\text{7.24} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}.$$

$$\text{7.25} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 2n + 1} \right)^n.$$

$$\text{7.26} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n} \right)^{3n}.$$

$$\text{7.27} \quad \frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{10n-2} + \dots$$

$$\text{7.28} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln^2(3n+1)}$$

7.2 Знакопеременные ряды

Определение Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется знакопеременным.

Знакопеременный ряд имеет вид

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots, \quad (7.7)$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Для знакопеременного ряда имеет место достаточный признак сходимости, который называют признаком Лейбница.

Признак Лейбница Если в знакопеременном ряде (9.7) абсолютные величины членов ряда убывают $|u_1| > |u_2| > \dots > |u_n| > \dots$ и общий член ряда u_n стремится к 0 при неограниченном увеличении его номера, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$, то ряд (9.7) сходится, его сумма положительная и не превосходит первого члена ряда ($0 < S < u_1$).

Замечание Если хотя бы одно условие признака Лейбница не выполняется, то ряд расходится.

Если знакопеременный ряд удовлетворяет условию признака Лейбница, то можно оценить ошибку, которая получится, если заменить его сумму S частичной суммой S_n . Допускаемая при этом погрешность, оценивается для знакопеременного ряда по признаку Лейбница.

При такой замене мы отбрасываем все члены ряда, начиная с u_{n+1} . Но отбрасываемые члены образуют знакопеременный ряд, сумма которого меньше первого члена этого ряда, т. е. меньше u_{n+1} .

Ошибка, совершаемая при замене суммы ряда S на частичную сумму S_n , равна $\delta = |r_n| = |S - S_n|$ и не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов ряда, т. е. $|r_n| < u_{n+1}$.

Решение типовых примеров

7.29 Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2} + \dots$$

Вычислить приближенно его сумму, удержав три первых члена ряда, и оценить погрешность.

Решение

Проверим выполнимость условий признака Лейбница, т.к. $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$,

$$1) \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \frac{1}{16} > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0.$$

Оба условия выполняются. Следовательно, данный ряд сходится

$$S \approx S_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = 0,2014.$$

Ошибка δ , получающаяся при замене суммы этого ряда суммой трёх первых членов, меньше абсолютной величины четвертого члена, то есть

$$\delta < |u_4|, \quad \delta < \frac{1}{25} = 0,04.$$

Ответ: $S = 0,2014$, $\delta < 0,04$.

7.30 Вычислить сумму ряда с точностью до 0,01

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n^2}.$$

Решение

Данный ряд сходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n^2} = 0$,

Так как $|r_n| < u_{n+1} < 0,01$, то найдём n

$$\left| \frac{1}{3(n+1)^2} \right| < 0,01, \quad 3(n+1)^2 > 100,$$

$$\sqrt{3}(n+1) > 10, \quad n+1 > \frac{10}{\sqrt{3}},$$

$$n > 5,7 - 1, \quad n > 4,7.$$

Следовательно, $n = 5$.

Значит, это неравенство выполняется, начиная, с $n = 5$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} S \approx S_5 &= \frac{1}{3 \cdot 1^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} - \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} = \\ &= 0,333 - 0,083 + 0,037 - 0,021 + 0,013 = 0,279. \end{aligned}$$

Ответ: $S = 0,28$.

7.31 а) Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{1}{i} + \dots$$

суммой четырех первых его членов. Найти эту сумму.

б) Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$0,1 - \frac{0,1^2}{2} + \frac{0,1^3}{3} - \frac{0,1^4}{4} + \dots$$

суммой трех первых его членов. Найти эту сумму.

Задания для решения в аудитории

Вычислить сумму ряда с точностью до ε

$$7.32 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}, \quad \varepsilon = 0,001. \quad 7.33 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}, \quad \varepsilon = 0,01.$$

$$7.34 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{3^n}, \quad \varepsilon = 0,1. \quad 7.35 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \quad \varepsilon = 0,1.$$

$$7.36 \quad \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{i^3 + 1}, \quad \varepsilon = 0,01.$$

$$7.37 \quad 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \quad \varepsilon = 0,01.$$

7.3 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Определение Ряды, члены которых имеют произвольные знаки, называются знакопеременными рядами.

$$\text{Пусть} \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (7.8)$$

знакопеременный ряд.

Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ могут быть как положительными, так и отрицательными, причем расположение положительных и отрицательных членов ряда произвольное.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если для знакопеременного ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$, то данный знакопеременный ряд также сходится.

Определение Знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$.

На основании достаточного признака сходимости знакопеременного ряда **всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.**

Определение Знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ называется **условно сходящимся** (или не абсолютно сходящимся), если он сходится, а ряд $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$, составленный из абсолютных величин его членов расходится.

Решение типовых примеров

Исследовать сходимость знакопеременных рядов и установить характер сходимости (абсолютная, условная)

$$7.38 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}.$$

Решение

Ряд знакочередующийся, поэтому применим признак Лейбница.

$$1) \quad 1 > \frac{1}{\sqrt[4]{2^5}} > \frac{1}{\sqrt[4]{3^5}} > \frac{1}{\sqrt[4]{4^5}} > \dots \text{первое условие признака выполнено,}$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} = 0 \quad \text{второе условие признака выполнено, значит, ряд}$$

сходится.

Составим ряд из абсолютных величин данного ряда:

$$1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2^5}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3^5}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4^5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} + \dots$$

Этот ряд обобщённо гармонический и при $p = \frac{5}{4} > 1$ является сходящимся.

Значит, данный ряд сходится абсолютно.

$$7.39 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}.$$

Решение

Применим признак Лейбница.

$$1) \quad \frac{1}{11} > \frac{1}{21} > \frac{1}{31} > \frac{1}{41} > \dots \text{первое условие признака выполнено,}$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10n+1} = 0 \quad \text{второе условие признака выполнено, значит, ряд}$$

сходится.

Составим ряд из абсолютных величин данного ряда:

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{10n+1} + \dots$$

Исследуем этот ряд с помощью интегрального признака Коши:

$$f(x) = \frac{1}{10x+1},$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{10x+1} = \frac{1}{10} \int_1^{\infty} \frac{d(10x+1)}{10x+1} = \frac{1}{10} \ln(10x+1) \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Интеграл расходится, поэтому и ряд расходится.

Значит, данный ряд сходится условно.

$$7.40 \quad 1,1 - 1,01 + 1,001 - \dots + (-1)^{n-1} [1 + (0,1)^n] + \dots$$

Решение

Применим признак Лейбница.

1) $1,1 > 1,01 > 1,001 > \dots$ первое условие признака выполнено,

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{10^n}) = 1$ второе условие признака не выполняется. Значит, ряд

расходится.

Задания для решения в аудитории

Выяснить, какие ряды сходятся абсолютно, какие сходятся условно, какие расходятся

$$7.41 \quad -\frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \dots + (-1)^n \frac{2n+1}{2^n} + \dots$$

$$7.42 \quad -\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{10^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(3n+1)^2} + \dots$$

$$7.43 \quad -\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

$$7.44 \quad -1 + \frac{2^2}{2!} - \frac{3^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{n^n}{n!} + \dots$$

$$7.45 \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \dots$$

$$7.46 \quad \frac{1}{1!} - \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} - \frac{4^2}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n!} + \dots$$

$$7.47 \quad \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} + \dots$$

$$7.48 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}.$$

$$7.49 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)^2}{n^2+1}.$$

$$7.50 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$7.51 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n.$$

$$7.52 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n}.$$

7.4 Функциональные ряды

Определение Ряд, членами которого являются функции от x , называется функциональным:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (7.9)$$

Совокупность тех значений x , при которых функциональный ряд сходится, называется **областью сходимости** этого ряда. Областью сходимости функционального ряда чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси Ox .

Частичная сумма функционального ряда, т. е. сумма первых n его членов, является функцией переменной x :

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \quad (7.10)$$

В любой точке x из области сходимости функционального ряда (7.9) существует предел частичной суммы (7.10) при $n \rightarrow \infty$. В точках, не принадлежащих области сходимости функционального ряда частичная сумма $S_n(x)$ не имеет предела. Сумма функционального ряда является некоторой функцией от x , определенной в области сходимости ряда:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad \forall x \in D \quad (7.11)$$

Разность $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ называется остатком функционального ряда.

Определение Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся в области D , к функции $S(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся

такое число N , что для всех $n > N$ и для всех $x \in D$ справедливо неравенство $\left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon$ или $|R_n(x)| = |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Признак Вейерштрасса

(достаточный признак равномерной сходимости)

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на отрезке $[a, b]$ существует сходящийся

знакоположительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$, удовлетворяющий условию

$$|u_n(x)| \leq C_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a, b]$ равномерно.

Решение типовых примеров

7.53 Найти область сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$.

Решение

По радикальному признаку Коши имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{x} = \left| \frac{1}{x} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left| \frac{e}{x} \right|.$$

Ряд будет сходиться при $\left| \frac{e}{x} \right| < 1$, следовательно, $\frac{e^2}{x^2} - 1 < 0$, $\frac{e^2 - x^2}{x^2} < 0$,

так как $x^2 > 0$, то $e^2 - x^2 < 0$. Ряд сходится при $x \in (-\infty; -e) \cup (e; +\infty)$.

7.54 Исследовать на равномерную сходимость

$$\sin x + \frac{1}{2^2} \sin^2 2x + \frac{1}{3^2} \sin^3 3x + \dots + \frac{1}{n^2} \sin^n nx + \dots$$

Решение

Область определения $(-\infty; +\infty)$. Сравним данный ряд с числовым

знакоположительным рядом $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ - это обобщённо

гармонический ряд, при $p = 2 > 1$ он сходится. Так как $\left| \frac{\sin^n nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, то по признаку Вейерштрасса данный ряд равномерно сходится на всей оси Ox .

Задания для решения в аудитории

Найти область сходимости рядов

$$7.55 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lg x}}.$$

$$7.56 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{nx}.$$

$$7.57 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+x^2)^n}.$$

$$7.58 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}.$$

$$7.59 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$$

$$7.60 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{nx}}.$$

$$7.61 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n(1+x^2).$$

$$7.62 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}.$$

$$7.63 \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

Исследовать на равномерную сходимость.

$$7.64 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

$$7.65 \quad \frac{\sin x}{1!} + \frac{\sin 2x}{2!} + \dots + \frac{\sin nx}{n!} + \dots$$

$$7.66 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n^2}.$$

$$7.67 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}.$$

$$7.68 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + (4-x^2)^{n/2}}.$$

$$7.69 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n + (4-x^2)^{n/2}}.$$

7.5 Степенные ряды

Определение Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (7.12)$$

Числа $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ называются коэффициентами степенного ряда, $x \in R$. Ряд (7.12) разложен по степеням x . Рассматриваются также степенные ряды, разложенные по степеням $(x - x_0)$, то есть ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots, \quad (7.13)$$

где x_0 - некоторое постоянное число.

Ряд (7.13) легко приводится к виду (7.12), если положить $x - x_0 = z$. Поэтому при изучении степенных рядов можем ограничиться степенными рядами вида (7.12).

Основное свойство степенных рядов:

Теорема Абеля

Если степенной ряд (7.12) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно для всех x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$. Если ряд (7.12) расходится при $x = x_1$, то он расходится при всех x , удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля следует, что $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ весь состоит из точек сходимости степенного ряда и называется **интервалом сходимости степенного** ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $(-R; R)$. Число R называют **радиусом сходимости** степенного ряда, то есть $R > 0$ - это такое число, что при всех x , для которых $|x| < R$, ряд (7.12) абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.

В частности, когда ряд (7.12) сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем, что $R = 0$. Если же ряд (7.12) сходится во всех точках числовой оси $(-\infty; +\infty)$, то в этом случае $R = \infty$.

Отметим, что на концах интервала сходимости (то есть при $x = -R$ и при $x = +R$) сходимость ряда проверяется отдельно.

Радиус сходимости степенного ряда (7.12) находим по формулам:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (7.14)$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (7.15)$$

Решение типовых примеров

7.70 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n 3^n}{n!}$.

Решение

Вспользуемся формулой (9.14). $a_n = \frac{3^n}{n!}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Следовательно, ряд сходится на всей числовой оси.

7.71 Найти область сходимости степенного ряда

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Решение

Заданный ряд не полный. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$|u_n| = \left| \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right|, \quad |u_{n+1}| = \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{x^{2n-1}} \right| = |x^2| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2 < 1$ или $-1 < x < 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$, $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots$, сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$, тоже сходится по признаку Лейбница.

Следовательно, областью сходимости является отрезок $[-1; 1]$.

7.72 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^{n-1}}$.

Решение

Находим радиус сходимости ряда по формуле (9.14)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} : \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^n}{n \cdot 3^{n-1}} = 3.$$

Следовательно, ряд сходится при $-3 < x - 3 < 3$, то есть при $0 < x < 6$.

При $x = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Сходится по признаку Лейбница.

При $x = 6$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Это гармонический ряд – расходится.

Следовательно, областью сходимости является интервал $[0; 6)$.

Задания для решения в аудитории

Найти область сходимости степенных рядов

7.73 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^n.$

$$\begin{aligned}
7.74 \quad & 1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \dots \\
7.75 \quad & 1 + \frac{2x}{3^2 \sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2 \sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2 \sqrt{3^3}} + \dots \\
7.76 \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
7.77 \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n} \\
7.78 \quad & 1 + 3x + \dots + (n-1)3^{n-1}x^{n-1} + \dots \\
7.79 \quad & x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \dots \\
7.80 \quad & x + \frac{x^2}{20} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} + \dots \\
7.81 \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n} (x+2)^n \\
7.82 \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n^n} \\
7.83 \quad & (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \frac{(x+1)^4}{4 \cdot 4^3} + \dots \\
7.84 \quad & (x-4) + \frac{(x-4)^2}{\sqrt{2}} + \frac{(x-4)^3}{\sqrt{3}} + \frac{(x-4)^4}{\sqrt{4}} + \dots \\
7.85 \quad & \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(x-1)^3}{2^3} + \dots
\end{aligned}$$

7.6 Ряды Тейлора и Маклорена

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ разлагать в степенной ряд, т. е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда.

Если функцию $f(x)$ - любая функция, имеющая в некоторой окрестности точки x_0 производные $(n+1)$ -го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \quad (7.16)$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ $c \in (x; x_0)$ - остаточный член в форме Лагранжа.

Если для некоторого значения x $R_n(x) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то в пределе формула Тейлора преобразуется для этого значения x в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (7.17)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (7.18)$$

Этот ряд называется рядом Маклорена функции $f(x)$.

Некоторые примеры разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in (-\infty; \infty); \quad (7.19)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad x \in (-\infty; \infty); \quad (7.20)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \quad x \in (-\infty; \infty); \quad (7.21)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1; 1]; \quad (7.22)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad x \in [-1; 1]; \quad (7.23)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots +$$

$$+ \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad x \in [-1; 1]; \quad (7.24)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$x \in \left\{ \begin{array}{l} [-1;1], m \geq 0 \\ (-1;1], -1 < m < 0 \\ (-1;1), m \leq -1 \end{array} \right\}; \quad (7.25)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad x \in (-1;1). \quad (7.26)$$

Решение типовых примеров

7.86 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = 2^x$.

Решение

Найдём значения функции и её производных при $x = 0$:

$$f(x) = 2^x, \quad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2, \quad f'(0) = \ln 2,$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2, \quad f''(0) = \ln^2 2,$$

.....,

$$f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2, \quad f^{(n)}(0) = \ln^n 2,$$

Так как $0 < \ln 2 < 1$, то при фиксированном x имеет место неравенство $|f^{(n)}(x)| < 2^x$ для любого n . Следовательно, функция может быть представлена в виде суммы ряда Маклорена:

$$2^x = 1 + x \ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 2}{3!} + \dots \quad x \in (-\infty; \infty)$$

Это решение можно получить иначе: достаточно в разложении

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

заменить x на $x \ln 2$, так как $2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x \ln 2}$.

7.87 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{2}{3-x}$.

Решение

Воспользуемся формулой (9.26). Так как

$$f(x) = \frac{2}{3-x} = \frac{2}{3(1-\frac{x}{3})} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

то заменив x на $\frac{x}{3}$ получим:

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \dots \right),$$

или

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^n}{3^n} + \dots,$$

где $-1 < \frac{x}{3} < 1$,

то есть $-3 < x < 3$.

7.88 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \cos^2 x$.

Решение

$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, поэтому достаточно разложить в ряд функцию $\cos 2x$, заменив в формуле (9.21) x на $2x$:

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Это разложение справедливо, как и в случае $\cos x$, для всех x .

В итоге получим:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = \\ &= 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots \end{aligned}$$

7.89 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = e^{-x} \sin x$.

Решение

Ряд для функции e^{-x} получается из ряда для функции e^x заменой x на $-x$ и абсолютно сходится на всей числовой прямой. Ряд для функции $\sin x$ также абсолютно сходится на всей числовой прямой. Поэтому, чтобы получить разложение функции $f(x) = e^{-x} \sin x$ в ряд, достаточно перемножить абсолютно сходящиеся ряды для функций e^{-x} и $\sin x$.

$$e^{-x} \sin x = \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \dots$$

Полученный ряд, по свойству сходящихся рядов, сходится на всей числовой прямой к функции $f(x) = e^{-x} \sin x$.

Задания для решения в аудитории

7.90 Разложить функцию ряд Тейлора $f(x) = \frac{1}{x}$ по степеням $(x+2)$.

Разложить функцию ряд Тейлора, взяв три члена разложения

7.91 $f(x) = \sin x$ по степеням $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

7.92 $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$ по степеням x .

7.93 $f(x) = 2x \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - x$ по степеням x .

7.94 $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$ по степеням x .

7.95 $f(x) = \ln(1 - x - 6x^2)$ по степеням x .

7.96 Разложить функцию $y = \ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=1$ (при $x_0=1$).

7.97 Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = (1+x)^4$.

7.98 Разложить функцию $y = \sin \frac{x}{2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$.

7.7 Некоторые приложения степенных рядов

7.7.1 Вычисление значений функций

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_1$ с заданной точностью. Предположим, что эту функцию можно разложить в степенной ряд: $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$ на интервале $(-R; R)$ и $x_1 \in (-R; R)$.

Тогда $f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + \dots + a_n(x_1 - x_0)^n + \dots$. Взяв достаточное число первых членов ряда, получим

$$f(x_1) = S_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + \dots + a_n(x_1 - x_0)^n$$

Абсолютная погрешность этого приближенного равенства, то есть $|f(x_1) - S_n(x_1)|$ равно модулю остатка ряда $\Delta = |f(x_1) - S_n(x_1)| = |r_n(x_1)|$, где $r_n(x_1) = a_{n+1}(x_1 - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x_1 - x_0)^{n+2} + \dots$. Чтобы вычислить значение $f(x_1)$ с точностью $\varepsilon > 0$, нужно взять сумму такого числа n первых членов ряда, чтобы $|f(x_1) - S_n(x_1)| = |r_n(x_1)| \leq \varepsilon$.

Оценить погрешность можно с помощью остаточного члена ряда Тейлора. Если функция $f(x)$ разложена в степенной ряд, то этот ряд является ее рядом Тейлора (или Маклорена). В этом случае

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |R_n(x_1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x_1 - x_0)^{n+1} \right|,$$

где $c = x_0 + \theta(x_1 - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

В зависимости от конкретного случая применяется тот или иной метод оценки остатка ряда (или оценки погрешности).

Решение типовых примеров

7.99 Вычислить с точностью до 0,001 число e

Решение

Запишем ряд Маклорена для e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

При $x=1$ получим

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Запишем приближенное равенство

$$e^x \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Оценим погрешность приближения с помощью остаточного члена ряда Маклорена.

Так как $f^{(n+1)}(x) = e^x$, то $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$, где $c = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

При $x=1$ $R_n(1) = \frac{e^\theta}{(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$.

Учитывая, что $e^\theta < e < 3$, получим $R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$.

При $n=5$ $\frac{3}{(5+1)!} = \frac{1}{240} > 0.001$.

При $n=6$ $\frac{3}{7!} = \frac{1}{1680} < 0.001$.

Поэтому для достижения требуемой точности достаточно взять $n=6$.

Итак,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} =$$

$$= 1.0000 + 1.0000 + 0.5000 + 0.1667 + 0.0417 + 0.0083 + 0.0014 = 2.7181.$$

Следовательно, $e \approx 2.7181$ с точностью до 0,001.

7.100 Вычислить $\sin 18^\circ$ с точностью до 0,0001.

Решение

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} - \dots$$

Полученный ряд знакочередующийся, члены которого убывают по абсолютной величине. Поэтому его остаток не превосходит первого отброшенного члена ряда.

Так как $\frac{\pi^3}{3!10^3} > 0.0001$, а $\frac{\pi^5}{5!10^5} < 0.0001$, то с точностью до 0,0001 получим

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} = \frac{(3.14159)}{10} - \frac{(3.14159)^3}{3!10^3} = 0.314159 - 0.00517 = 0.30899.$$

Итак, $\sin 18^\circ \approx 0.3090$.

7.7.2 Вычисление определенных интегралов

Сущность метода поясним на конкретном примере

7.101 Вычислить $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение

Так как $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$, то положив $x = -x^2$, получим

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \text{ этот ряд сходится при } x \in (-\infty; +\infty) \text{ значит, его можно}$$

почленно интегрировать на любом отрезке и, в частности, на отрезке $\left[0; \frac{1}{3}\right]$:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots\right) dx = x \Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{3}} + \frac{x^5}{5 \cdot 2} \Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{x^7}{7 \cdot 6} \Big|_0^{\frac{1}{3}} + \dots =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 3^7} + \dots$$

Искомый интеграл представлен знакочередующимся рядом. Так как $\frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0.001$, то с точностью до 0,001 имеем

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} = 0.3333 - 0.0123 = 0.3210$$

Итак $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx \approx 0.321$.

7.7.3 Применение рядов к решению дифференциальных уравнений

Пусть требуется найти решение уравнения

$$y'' = F(x, y, y'), \quad (7.27)$$

удовлетворяющее начальным условиям при $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$.

Допустим, что решение $y = f(x)$ и его можно представить рядом

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Нужно найти $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., то есть значения производных от частного решения при $x = x_0$.

Из начального условия следует, что $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y'_0$. Из уравнения (9.27) получаем

$$y''_0 = f''(x_0) = F(x_0, y_0, y'_0).$$

Дифференцируя обе части уравнения (9.27) по x , получим

$$y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')y' + F'_{y'}(x, y, y')y''.$$

Подставляя в это равенство $x = x_0$, найдём

$$y'''_0 = f'''(x_0) = y'''(x_0).$$

Дифференцируя y''' еще раз по x , найдем $f^{IV}(x_0) = y^{IV}(x_0)$ и т. д. Найденные значения производных подставим в ряд Тейлора решения $y = f(x)$. Для тех значений x , при которых этот ряд сходится, он представляет решение уравнения.

Решение типовых примеров

7.102 Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного решения уравнения $y'' = y \cos x + x$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Решение

Ищем решение уравнения в виде ряда Маклорена (т. к. $x_0 = 0$)

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Учитывая, что при $x = 0$, $y = 1$ находим $y''(0) = 1\cos 0 + 0 = 1$.

Для нахождения y''' дифференцируем обе части данного уравнения $y''' = y' \cos x - y \sin x + 1$.

При $x = 0$ получим $y'''(0) = y'(0)\cos 0 + y(0)\sin 0 + 1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 = 1$

Подставляя значения $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$ в ряд для частного решения $y(x)$, получим приближенное выражение частного решения в виде частичной суммы ряда $y(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$.

Если дифференциальное уравнение линейное, то удобнее искать частное решение в виде степенного ряда $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ или $y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$.

Для нахождения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$ решение в виде степенного ряда подставляют в уравнение и приравнивают коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения.

Решение типовых примеров

$$7.103 \quad \begin{cases} y'' = 2xy' + 4y \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Решение

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$y(0) = a_0 = 0 \quad y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

$$y'(0) = a_1 = 1$$

$$\text{Следовательно, } y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$y' = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots$$

Подставляем y, y', y'' в уравнение, получим

$$\begin{aligned} 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots = \\ = 2x(1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots) + \\ + 4(x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots) \end{aligned}$$

откуда

$$2a_2 = 0 \quad a_2 = 0$$

$$3 \cdot 2a_3 = 2 + 4 \quad a_3 = 1$$

$$4 \cdot 3a_4 = 4a_2 + 4a_2 \quad a_4 = 0$$

$$n(n-1)a_n = (n-2) \cdot 2a_{n-2} + 4a_{n-2} \quad a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1}$$

Следовательно,

$$a_4 = 0; \quad a_5 = \frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{2!}; \quad a_6 = 0; \quad a_7 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{3!}; \quad a_9 = \frac{1}{4!};$$

$$a_{2k} = 0; \quad a_{2k+1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов и искомое частное решение, получим

$$y = x + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{n!} + \dots$$

$$y = x \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \right)$$

$$y = xe^{x^2}.$$

Задания для самостоятельного решения

7.104 Вычислить $\cos 10^0$ ограничившись двумя членами ряда, оценить погрешность.

7.105 Вычислить:

а) $\sqrt[4]{90}$ с точностью до 10^{-4} ; б) $\sqrt[4]{630}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$;

в) $\sin 9^0$ с точностью до 10^{-4} ; г) $\sqrt[5]{34}$ с точностью до 10^{-4} .

7.106 Вычислить $\ln 1,2$.

7.107 Вычислить $e^{-0,2}$ с точностью $\varepsilon = 0,0001$.

7. 108 Ограничиваясь первыми тремя членами разложения вычислить

а) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$; б) $\int_0^{0,5} \frac{e^x - 1}{x} dx$; в) $\int_0^{0,4} e^{-\frac{x^2}{4}} dx$.

7.109 Вычислить:

а) $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$;

б) $\int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

7.110 С помощью разложения в ряд по степеням x проинтегрировать уравнения: $y' = x - 2y$, $y(0) = 0$.

7.111 Методом последовательного дифференцирования найти первые три члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения

$$y'' = xy' - y + e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

7.112 Найти решение уравнения $y'' + y'x + y = x \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, используя метод неопределённых коэффициентов.

7.8 Ряды Фурье

Рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π , определённой на отрезке $[-\pi; \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (7.28)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (7.29)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (7.30)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (7.31)$$

Теорема Дирихле

(Достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье.)

Пусть 2π - периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1. $f(x)$ кусочно - монотонна, т.е. монотонна на всём отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна;

2. $f(x)$ кусочно – непрерывна, т.е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

то есть равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. В точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (на концах отрезка) ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l; l]$, где l - произвольное число, то при выполнении на этом отрезке условий Дирихле указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{nx\pi}{l} + b_n \sin \frac{nx\pi}{l}), \quad (7.32)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad (7.33)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{nx\pi}{l} dx, \quad (7.34)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{nx\pi}{l} dx. \quad (7.35)$$

В случае, когда $f(x)$ - чётная функция, её ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{nx\pi}{l}, \quad (7.36)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{nx\pi}{l} dx \quad (7.37)$$

В случае, когда $f(x)$ - нечётная функция, её ряд Фурье содержит только синусы

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{nx\pi}{l}, \quad (9.38)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (10.39)$$

Если функция $f(x)$ не является периодической, то, чтобы разложить её в ряд Фурье, строят некоторую периодическую функцию $f^*(x)$, которая в области определения функции совпадает с функцией $f(x)$. В этом случае говорят, что функцию $f(x)$ периодически продолжают на всю числовую ось.

Возможны следующие случаи:

1. Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l; l]$, то строят функцию $f^*(x)$ с периодом $T = 2l$. Она на отрезке $[-l; l]$ совпадает с функцией $f(x)$, а на остальной части числовой оси является её периодическим продолжением.

2. Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[a; a + 2l]$, то строят $f^*(x)$ с периодом $T = 2l$, которая на отрезке $[a; a + 2l]$ совпадает с функцией $f(x)$, а на остальной части числовой оси является её периодическим продолжением. Коэффициенты Фурье будут находиться по формулам (7.32 - 7.35), только пределами интегрирования являются a и $a + 2l$.

3. Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[0; l]$, то для разложения в ряд Фурье достаточно её доопределить на отрезке $[-l; 0]$ произвольным способом. Затем разложить в ряд Фурье, считая её заданной на отрезке $[-l; l]$. Наиболее целесообразно функцию доопределить так, чтобы её значения в точках отрезка $[-l; 0]$ находились из условия $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$. В первом случае функция $f(x)$ на отрезке $[-l; l]$ будет чётной, а во втором – нечётной. Коэффициенты Фурье будут находиться по формулам (7.36 - 7.39).

Решение типовых примеров

7.113 Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$ уравнением $f(x) = \pi + x$.

Решение

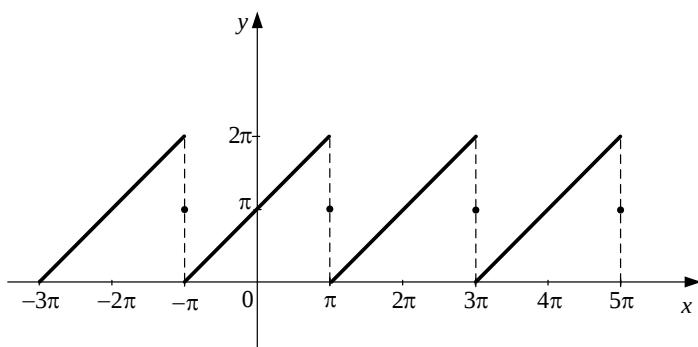


Рисунок 1

На рисунке 1 изображён график функции $f(x) = \pi + x$.

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле: периодическая, монотонна и непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Определяем коэффициенты ряда Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(\pi + x)^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\pi^2}{2} \right) = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \cdot \cos nx dx = \left| \begin{array}{l} u = (\pi + x); du = dx \\ dv = \cos nx dx; v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} (\pi + x) \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \cdot \sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = (\pi + x); du = dx \\ dv = \sin nx dx; v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{\pi} (\pi + x) \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \cos nx dx = -\frac{1}{\pi n} \cdot 2\pi \cos \pi n = -\frac{2}{n} \cos \pi n,$$

то есть

$$b_n = \begin{cases} -\frac{2}{n}, & n = 2k, \\ \frac{2}{n}, & n = 2k - 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(x) = \pi + 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right) =$$

$$= \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

7.114 Синусоидальное напряжение с частотой $f = 400$ Гц и действующим значением $U_1 = 115$ В питает приёмник $r_H = 10$ Ом через однополупериодный выпрямитель (рисунок 2). Силовой трансформатор имеет коэффициент трансформации $n = 1$. Кривая тока, протекающего через сопротивление нагрузки, изображена на рисунке 3.

Разложить кривую тока i_2 в тригонометрический ряд.

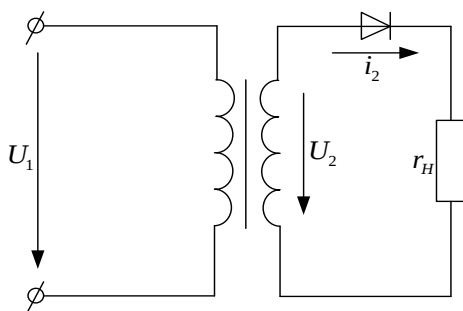


Рисунок 2

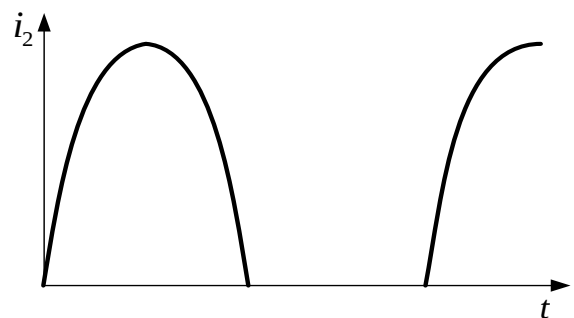


Рисунок 3

Решение

1. Определяем коэффициенты ряда Фурье с помощью формул Фурье:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega t) d\omega t, \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega t) \sin k\omega t d\omega t;$$

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega t) \cos k\omega t d\omega t.$$

Перенесём начало координат вправо на угол $\frac{\pi}{2}$ (рисунок 4).

В этом случае получаем кривую выпрямленного тока, симметричную относительно оси ординат, и поэтому в ряде Фурье будут отсутствовать члены с синусами.

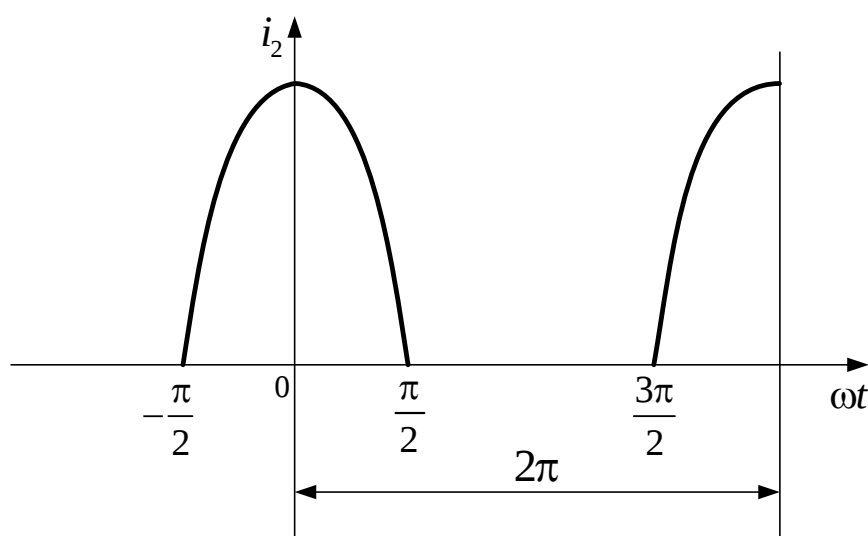


Рисунок 4

Определяем $I_0(A_0)$:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m \cos \omega t d\omega t = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_m \cos \omega t d\omega t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 d\omega t + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 0 d\omega t + \right. \\ \left. + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} I_m \cos \omega t d\omega t \right] = 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_m \cos \omega t d\omega t = \frac{I_m}{\pi} \sin \omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{I_m}{\pi}.$$

Таким образом, $I_0 = \frac{I_m}{\pi},$

где

$$I_m = \frac{U_m}{r_H} = \frac{\sqrt{2}U}{r_H} = \frac{\sqrt{2} 115}{10} = 15,2 A,$$

$$I_0 = \frac{15,2}{\pi} = 5,15A.$$

Выведем формулу для определения амплитуд гармонических составляющих выпрямленного тока:

$$I_{mk} = C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I_m \cos \omega t \cos k\omega t d\omega t.$$

Аналогично предыдущему случаю, разбиваем этот интеграл на четыре интеграла. В результате получаем

$$C_k = I_{mk} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_m \cos \omega t \cdot \cos k\omega t \cdot d\omega t,$$

но

$$\cos \omega t \cdot \cos k\omega t = \frac{1}{2} [\cos(k\omega t - \omega t) + \cos(k\omega t + \omega t)].$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_{mk} &= \frac{I_m}{\pi} \left| \frac{\sin(k+1)\omega t}{k+1} + \frac{\sin(k-1)\omega t}{k-1} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{I_m}{\pi} \left| \frac{(k-1)(\sin k\omega t \cdot \cos \omega t + \cos k\omega t \cdot \sin \omega t) + (k+1)(\sin k\omega t \cdot \cos \omega t - \cos k\omega t \cdot \sin \omega t)}{k^2 - 1} \right|_0^{\frac{\pi}{2}}; \\ C_k = I_{mk} &= -\frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{\cos k \frac{\pi}{2}}{k^2 - 1}. \end{aligned}$$

2. Вычисляем амплитуды гармонических составляющих тока, положив $k=1, 2, 3$.

При $k=1$

$$C_1 = I_{m_1} = -\frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{\cos k \frac{\pi}{2}}{1-1} = \frac{0}{0}$$

получаем неопределённость. Для раскрытия этой неопределённости воспользуемся правилом Лопиталя:

$$C_1 = I_{m_1} = -\frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{\frac{d}{dk} \cos k \frac{\pi}{2}}{\frac{d}{dk} (k^2 - 1)} = -\frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{-\frac{\pi}{2} \sin k \frac{\pi}{2}}{2k}.$$

Так как $k=1$, то

$$I_{m_1} = \frac{I_m}{2} \quad \text{и} \quad I_{m_1} = \frac{16,2}{2} = 8,1A.$$

При $k=2$

$$C_2 = I_{m_2} = -\frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{\cos 2\frac{\pi}{2}}{4-1} = \frac{2 \cdot 16,2}{3 \cdot 3,14}; \quad I_{m_2} = 3,42 \text{ A.}$$

При $k = 3$

$$C_3 = I_{m_3} = -\frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{\cos 3\frac{\pi}{2}}{9-1} = 0.$$

При $k = 4$

$$C_4 = I_{m_4} = -\frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{\cos 4\frac{\pi}{2}}{16-1} = -\frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2I_m}{\pi};$$

$$I_{m_4} = -\frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2 \cdot 16,2}{3,14} = -0,686 \text{ A.}$$

В результате записываем общую формулу для определения коэффициента C_k для $k = 2, 4, 6, \dots$ в виде

$$C_k = I_{mk} = -\frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{(k+1)(k-1)}.$$

Таким образом, уравнение для тока во вторичной цепи трансформатора при однополупериодном выпрямлении будет:

$$i_2 = (5,15 + 8,1 \cos \omega t + 3,42 \cos 4\omega t - 0,686 \cos 4\omega t + \dots) \text{ A.}$$

Вывод Формулы Фурье позволяют выполнить разложение несинусоидальной кривой в ряд Фурье аналитически, если задан закон её изменения.

Задания для решения в аудитории

7.115 Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{с периодом } T = 2\pi.$$

7.116 Разложить функцию с периодом $T = 2\pi$ в ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

7.117 Разложить в ряд функцию с периодом $T = 2\pi$, определенную равенством $f(x) = \frac{x^2}{4} \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$.

7.118 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$, $T = 2\pi$.

7.119 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=1$ на отрезке $0 < x < \pi$ с периодом $T = 2\pi$, если $f(-x) = -f(x)$.

$$\mathbf{7.120} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}, \quad f(-x) = -f(x), \quad T = 2\pi.$$

$$\mathbf{7.121} \quad \text{Разложить функцию в ряд Фурье } f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \end{cases} \quad T = 2l.$$

7.122 Разложить функцию $f(x)=x$ в ряд Фурье по косинусам, если функция задана на интервале $[0;1]$, $T = 2l$.

7.123 Разложить функцию $f(x)=x$ в ряд Фурье по синусам, если функция задана на интервале $[0;1]$, $T = 2l$.

7.124 Разложить функцию $f(x)=2x-3$ на отрезке $(5;9)$ в ряд по косинусам.

$$\mathbf{7.125} \quad f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi.$$

$$\mathbf{7.126} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x < 1, \end{cases} \quad T = 2\pi.$$

7.127 Необходимо разложить в гармонический ряд функцию, представляющую собой последовательность прямоугольных импульсов напряжения (рисунок 5).

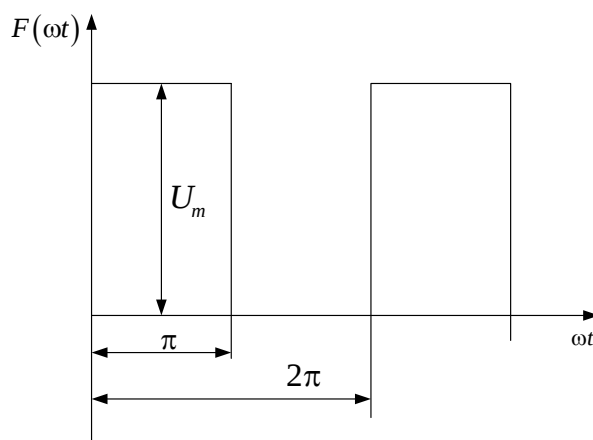


Рисунок 5

7.128 Напряжение на выходе генератора линейного напряжения имеет вид (рисунок 6)

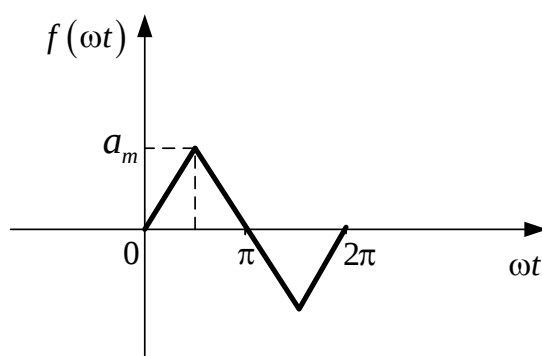


Рисунок 6

Разложить кривую напряжения в ряд Фурье.

ГЛАВА 8 ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

8.1 Преобразование Лапласа

Основные понятия операционного исчисления

Определение 1. *Оригиналом* называется функция $f(t)$, обладающая следующими свойствами:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.
2. $|f(t)| < Me^{S_0 t}$ при $t > 0$, то есть возрастает не быстрее экспоненциальной функции, где M и S_0 - постоянные положительные числа.
3. На любом конечном отрезке $[a, b]$ положительной полуоси $0t$ функция $f(t)$ удовлетворяет *условиям Дирихле*, то есть
 - а) ограничена;
 - б) либо непрерывна, либо имеет конечное число точек разрыва I рода;
 - в) имеет конечное число экстремумов.

Функции, являющиеся оригиналами, в операционном исчислении называются иначе *начальными функциями*, или *функциями, изображаемыми по Лапласу*.

Определение 2. *Изображением* оригинала $f(t)$ называется функция комплексного аргумента $p = s + i\omega$, определяемая равенством:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (8.1)$$

Функция $F(p)$ иначе называется *преобразованием Лапласа* или *L-изображением*, а несобственный интеграл в (8.1) – *интегралом Лапласа*. Операция перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называется *прямым преобразованием Лапласа*.

Замечание. В общем случае, если известно изображение $F(p)$, то оригинал находится по формуле *обратного преобразования Лапласа*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S-i\infty}^{S+i\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (8.2)$$

Тот факт, что функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$ обозначают следующими символами:

$$F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t), \text{ или } F(p) = L\{f(t)\}.$$

Соответствие между оригиналами и изображениями обладает следующими *свойствами*:

1. Любому оригиналу соответствует единственное изображение и наоборот.

2. Любой линейной комбинации конечного множества оригиналов в качестве изображения отвечает соответствующая линейная комбинация их изображений (*свойство линейности*), то есть

$$\sum_{k=1}^{k=n} C_k F(p) \longrightarrow \sum_{k=1}^{k=n} C_k f(t). \quad (8.3)$$

На основе равенства (8.1) составлена таблица изображений некоторых функций (таблица 8.1).

Таблица 8.1 Оригинал - изображение

№№	$f(t)$	$F(p)$	№№	$f(t)$	$F(p)$
1	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	11	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
2	$C = const$	$\frac{C}{p}$	12	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	13	$e^{-\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	14	$e^{-\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$
5	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$	15	$t shat$	$\frac{2ap}{(p^2 - a^2)^2}$
6	$t^n e^{-\lambda t}$	$\frac{n!}{(p + \lambda)^{n+1}}$	16	$t chat$	$\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$
7	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	17	$e^{-\lambda t} shat$	$\frac{a}{(p + \lambda)^2 - a^2}$
8	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	18	$e^{-\lambda t} chat$	$\frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 - a^2}$
9	$shat$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	19	$A \sin(\omega t + \varphi_0)$	$A e^{\frac{\varphi_0}{\omega} p} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
10	$chat$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	20	$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$	1

Основные теоремы операционного исчисления

На практике при нахождении изображений функций-оригиналов и при отыскании (восстановлении) оригиналов по данным изображениям, а также при решении дифференциальных и интегральных уравнений кроме таблицы «Оригинал – изображение» используются и теоремы операционного исчисления, которые в символической форме представлены в таблице 8.2. (При этом считают, что $f(t) \longleftrightarrow F(p)$).

Таблица 8.2

Название теоремы	Оригинал	Изображение
Теорема подобия	$f(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
Теорема запаздывания	$f(t-b), \quad b > 0$	$e^{-bp} F(p)$
Теорема смещения (или затухания)	$e^{-bt} f(t)$	$F(p+b)$
Дифференцирование изображения	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
Дифференцирование оригинала	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
	$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$
	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
Теорема о свёртке (теорема умножения изображений)	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ $\int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$ $F_1(p) \cdot F_2(p)$
Интегрирование оригинала	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
Интегрирование изображения	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(z) dz$
Интеграл Дюамеля ($F_1(p) \longleftrightarrow x(t)$, $F_2(p) \longleftrightarrow h(t)$)	$x(0) \cdot h(t) + \int_0^t x'(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$	$pF_1(p) \cdot F_2(p)$

Решение типовых примеров

Используя таблицу, найти изображения функций-оригиналов:

8.1 $f(t) = e^{2t} \cos 5t.$

Решение

Применяя формулу 14 (таблица 8.1) при $\lambda = 2$, $\omega = 5$, получим

$$F(p) = \frac{p-2}{(p-2)^2 + 25}.$$

8.2 $f(t) = \cos t \cdot \cos 2t.$

Решение

Преобразуем произведение тригонометрических функций в сумму, то
есть

$$\cos t \cdot \cos 2t = \frac{1}{2}(\cos t + \cos 3t).$$

Согласно формуле 8 (таблица 8.1) имеем

$$\cos t \leftarrow \frac{p}{p^2 + 1}, \quad \cos 3t \leftarrow \frac{p}{p^2 + 9}.$$

С учётом свойства линейности получим

$$F(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{p^2 + 1} + \frac{p}{p^2 + 9} \right).$$

8.3 $f(t) = \operatorname{sh} 8t.$

Решение

По определению гиперболического синуса имеем

$$\operatorname{sh} at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at}).$$

Следовательно, согласно формуле 5 (таблица 8.1) имеем

$$F(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-8} - \frac{1}{p+8} \right) = \frac{8}{p^2 - 64}.$$

8.4 $f(t) = \cos t + e^{3t}.$

8.5 $f(t) = 3t^2 - 2 - 5\sin t + 2e^{2t}.$

8.6 $f(t) = \cos^2 \omega t.$

8.7 $f(t) = \sin^2 \omega t.$

Восстановить оригиналы по данным изображениям:

8.8 $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-3)}.$

Решение

Функция $F(p)$ является дробно-рациональной функцией. Разложим данную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-3}.$$

Для определения коэффициентов имеем тождество:

$$A(p-3) + B(p+1) = 1.$$

Используя метод частных значений, получим

$$\begin{array}{l|l} p = -1 & -4A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}; \\ p = 3 & 4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4}. \end{array}$$

Таким образом,

$$F(p) = -\frac{1}{4(p+1)} + \frac{1}{4(p-3)}.$$

Согласно формуле 5 (таблица 8.1)

$$-\frac{1}{4(p+1)} \xrightarrow{\cdot} -\frac{1}{4}e^{-t}, \quad \frac{1}{4(p-3)} \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{4}e^{3t}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)} \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t}).$$

8.9 $F(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5}.$

Решение

В этом примере используем элементарные приёмы для разложения данной дроби на сумму таких дробей, оригиналы которых известны:

а) выделим в знаменателе полный квадрат:

$$\frac{p}{p^2 - 2p + 5} = \frac{p}{(p^2 - 2p + 1) + 4} = \frac{p}{(p-1)^2 + 4};$$

б) применим искусственные приёмы (сначала в числителе вычтем и прибавим единицу, а вторую слагаемую дробь умножим и разделим на два)

$$\frac{(p-1)+1}{(p-1)^2 + 4} = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 2^2} + \frac{1 \cdot 2}{2((p-1)^2 + 2^2)}.$$

Используя формулы 13 и 14 (таблица 8.1), находим

$$\frac{p-1}{(p-1)^2 + 2^2} \xrightarrow{\cdot} e^t \cos 2t; \quad \frac{2}{(p-1)^2 + 2^2} \xrightarrow{\cdot} e^t \sin 2t.$$

Учитывая свойство линейности, получим

$$f(t) = e^t \cos 2t + \frac{1}{2} e^t \sin 2t = e^t \left(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right).$$

Задания для решения в аудитории

$$8.10 \quad F(p) = \frac{4}{p^2(p+2)}.$$

$$8.11 \quad F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)^2}.$$

$$8.12 \quad F(p) = \frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

$$8.13 \quad F(p) = \frac{p+3}{p(p^2-4p+3)}.$$

$$8.14 \quad F(p) = \frac{5}{p^2+4} + \frac{20p}{p^2+9}.$$

$$8.15 \quad F(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p-1)^2}.$$

$$8.16 \quad F(p) = \frac{p-1}{p^2+3p}.$$

$$8.17 \quad F(p) = \frac{3p+2}{p(p+1)(p^2+1)}.$$

$$8.18 \quad F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}.$$

$$8.19 \quad F(p) = \frac{p}{(p-1)(p^2+4)}.$$

8.2 Нахождение оригиналов и изображений с использованием теорем

1. Теорема подобия

Если $f(t) \xleftrightarrow{\cdot} F(p)$, то $f(at) \xleftrightarrow{\cdot} \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$, где $a > 0$.

Задания для самостоятельного решения

8.20 Зная, что $\sin t \xleftrightarrow{\cdot} \frac{1}{p^2+1}$ и $\cos t \xleftrightarrow{\cdot} \frac{1}{p^2+1}$, доказать

справедливость формул 7 и 8 (таблица 8.1).

2. Теорема сдвига

Если $f(t) \xleftrightarrow{\cdot} F(p)$, то $e^{-bt} f(t) \xleftrightarrow{\cdot} F(p+b)$.

Используя теорему сдвига (или затухания), найти изображения оригиналов:

$$8.21 \quad f(t) = e^{-2t}.$$

Так как $1(t) \xleftrightarrow{\cdot} \frac{1}{p}$, то $1(t) \cdot e^{-2t} \xleftrightarrow{\cdot} \frac{1}{p+2}$.

Сверить ответ, используя таблицу.

Задания для самостоятельного решения

8.22 $f(t) = e^{3t} \cos 4t.$

8.23 $f(t) = e^{-2t} \sin 2t \cos 3t.$

Рекомендация Воспользоваться формулой

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

Найти оригиналы, изображения которых задаются формулой:

8.24 $F(p) = \frac{7}{p^2 + 10p + 41}.$

8.25 $F(p) = \frac{p+3}{p^2 + 2p + 10}.$

3. Теорема запаздывания

Если $f(t) \xrightarrow{\cdot} F(p)$, то $f(t-b) \xrightarrow{\cdot} e^{-pb} F(p)$ (для $t > b$, $b > 0$).

Используя теорему запаздывания, найти изображения функций:

8.26 $f(t) = 1(t) - 1(t-a)$, $a > 0$.

Так как $1(t) = \frac{1}{p}$, то по теореме запаздывания $1(t-a) \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{p} e^{-pa}$.

Согласно свойству линейности имеем:

$$1(t) - 1(t-a) \xrightarrow{\cdot} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pa} \right) = \frac{1}{p} (1 - e^{-pa}).$$

Задания для самостоятельного решения

8.27 $f(t) = \sin(t - \pi).$

8.28 $f(t) = (t-1)^4.$

4. Теорема о свертке

Если $f_1(t) \xrightarrow{\cdot} F_1(p)$, $f_2(t) \xrightarrow{\cdot} F_2(p)$, то

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \xrightarrow{\cdot} \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau.$$

Используя теорему о свертке, найти оригиналы изображений:

8.29 $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p-2}.$

$$F_1(p) = \frac{1}{p-1}, \quad F_2(p) = \frac{1}{p-2}.$$

По таблице 8.1 находим $\frac{1}{p-1} \xrightarrow{\cdot} e^t$ и $\frac{1}{p-2} \xrightarrow{\cdot} e^{2t}$.

Применяя теорему о свертке, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p-2} &\xrightarrow{\cdot} \int_0^t e^{\tau} \cdot e^{2(t-\tau)} d\tau = \int_0^t e^{\tau} \cdot \frac{e^{2t}}{e^{2\tau}} d\tau = e^{2t} \int_0^t \frac{e^{\tau}}{e^{2\tau}} d\tau = e^{2t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau = \\ &= -e^{2t} \int_0^t e^{-\tau} d(-\tau) = -e^{2t} \cdot e^{-\tau} \Big|_0^t = -e^{2t} (e^{-t} - 1) = e^{2t} - e^t. \end{aligned}$$

Решить данный пример разложением на элементарные дроби. Ответы сверить.

Задания для решения в аудитории

$$8.30 \quad F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2+1}.$$

$$8.31 \quad F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

$$8.32 \quad F(p) = \frac{4}{p^2(p+1)}.$$

5. Теорема дифференцирования изображения

Если $f(t) \xrightarrow{\cdot} F(p)$, то $t^n f(t) \xrightarrow{\cdot} (-1)^n F^{(n)}(p)$.

По теореме дифференцирования изображения, найти изображение данных функций:

$$8.33 \quad f(t) = te^{4t}.$$

В данном примере $n=1$ и $e^{4t} \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{p-4}$.

$$\text{Тогда } te^{4t} \xrightarrow{\cdot} (-1)^1 \cdot \left(\frac{1}{p-4} \right)' = \frac{1}{(p-4)^2}.$$

Задания для решения в аудитории

$$8.34 \quad f(t) = t^2 e^{4t}.$$

$$8.35 \quad f(t) = t^2 \sin 3t.$$

$$8.36 \quad f(t) = te^{-2t}.$$

$$8.37 \quad f(t) = t \cos \omega t.$$

6. Теорема о дифференцировании оригинала

Если $f(t) \xrightarrow{\cdot} F(p)$,

то $f^{(n)}(t) \xrightarrow{\cdot} p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.

В частности, при $n=1$ $f'(t) \xrightarrow{\cdot} pF(p) - f(0)$,

$$\text{при } n = 2 \quad f''(t) \leftarrow \frac{1}{p^2} F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Пользуясь теоремой дифференцирования оригинала, найти изображения следующих функций:

$$\mathbf{8.38} \quad f(t) = \sin t.$$

$$\text{Пусть } \sin t \leftarrow F(p).$$

По теореме дифференцирования оригинала имеем:

$$\text{при } n = 1 \quad (\sin t)' \leftarrow pF(p) - \sin 0 = pF(p),$$

$$\text{при } n = 2 \quad (\sin t)'' \leftarrow p^2 F(p) - p \sin 0 - \cos 0 = p^2 F(p) - 1.$$

Учитывая, что $(\sin t)'' = (\cos t)' = -\sin t$, представим последнее соответствие следующим образом:

$$-\sin t \leftarrow p^2 F(p) - 1.$$

Переходя к равенству изображений, имеем:

$$-F(p) \leftarrow p^2 F(p) - 1.$$

Отсюда находим

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1}, \quad \text{то есть} \quad \sin t \leftarrow \frac{1}{p^2 + 1}.$$

$$\mathbf{8.39} \quad \varphi(t) = y''(t) - y'(t) - y(t), \text{ если } y(0) = y'(0) = 0 \text{ и } y(t) \leftarrow Y(p).$$

По теореме дифференцирования оригинала имеем:

$$y'(t) \leftarrow pY(p) - y(0) = pY(p),$$

$$y''(t) \leftarrow p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p).$$

Так как сумме функций в качестве изображения соответствует сумма их изображений, то получим

$$y''(t) - y'(t) - y(t) \leftarrow (p^2 - p - 1)Y(p).$$

Задания для решения в аудитории

$$\mathbf{8.40} \quad f(t) = e^{-t}.$$

$$\mathbf{8.41} \quad \varphi(t) = f'''(t) - 4f'(t) + 5f(t), \text{ если } f(t) \leftarrow F(p), \quad f(0) = -1, \\ f'(0) = 2 \text{ и } f''(0) = 1.$$

$$\mathbf{8.42} \quad \varphi(t) = y'''(t) - y''(t) + 2y'(t) - 2y(t), \text{ если } y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \\ y''(0) = 2 \text{ и } y(t) \leftarrow Y(p).$$

7. Теорема интегрирования оригинала

Если $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$, то $\frac{F(p)}{p} \xrightarrow{\cdot} \int_0^t f(\tau) d\tau$.

Замечание. Из теоремы дифференцирования и интегрирования оригинала видно, что изображения производной и интеграла получаются из изображения функции – оригинала $f(t)$ с помощью выполнения над $F(p)$ алгебраических операций.

Это даёт возможность многие операции математического анализа (решение дифференциальных и интегральных уравнений и т.п.) свести к выполнению алгебраических действий над изображениями искомых функций.

8.43 Найти изображение $y'(t) + y(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau$,

если $y(0)=1$ и $Y(p) \xrightarrow{\cdot} y(t)$.

Решение

По теореме дифференцирования и интегрирования оригинала имеем

$$y'(t) \xleftarrow{\cdot} pY(p) - y(0) = pY(p) - 1,$$

$$\int_0^t y(\tau) d\tau \xleftarrow{\cdot} \frac{Y(p)}{p}.$$

Отсюда находим

$$y'(t) + y(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau \xleftarrow{\cdot} \frac{p^2 + p + 1}{p} Y(p) - 1.$$

Задания для решения в аудитории

8.44 Найти изображение $y'(t) - 2 \int_0^t y(\tau) d\tau$,

если $y(0)=0$, $y(t) \xleftarrow{\cdot} Y(p)$.

8.3 Решение дифференциальных уравнений операционным методом

Алгоритм решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами операционным методом

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t), \quad (8.4)$$

где a_1 и a_2 - постоянные коэффициенты, а $f(t)$ является оригиналом.

Требуется найти частное решение $y(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$, то есть для данного уравнения поставлена задача Коши.

С помощью **операционного метода** задача решается согласно **следующему алгоритму**.

1. Обозначим изображения искомого решения $y(t)$ и функции $f(t)$ соответственно:

$$\begin{aligned} y(t) &\stackrel{\cdot}{\longleftrightarrow} Y(p); \\ f(t) &\stackrel{\cdot}{\longleftrightarrow} F(p). \end{aligned}$$

2. Применяя формулы дифференцирования оригинала и с учётом начальных условий, находим изображения производных $y'(t)$ и $y''(t)$:

$$\begin{aligned} y'(t) &\stackrel{\cdot}{\longleftrightarrow} pY(p) - y(0); \\ y''(t) &\stackrel{\cdot}{\longleftrightarrow} p^2Y(p) - py(0) - y'(0). \end{aligned}$$

3. Используя свойство линейности, находим изображение левой части исходного дифференциального уравнения и, приравнявая его изображению функции $f(t)$ в правой части, получим **вспомогательное (операторное) уравнение**, которое является всегда линейным алгебраическим уравнением относительно $Y(p)$:

$$(p^2Y(p) - py_0 - y'_0) + a_1pY(p) - y(0) + a_2Y(p) = F(p). \quad (8.5)$$

4. Разрешая относительно $Y(p)$, находим **операторное решение** уравнения (8.5):

$$Y(p) = \frac{F(p) + py_0 + y'_0 + a_1y_0}{p^2 + a_1p + a_2}. \quad (8.6)$$

5. Используя тождественные преобразования в выражении (8.6) и таблицу 8.1, восстановим оригинал изображения $Y(p)$, то есть получим искомое **частное решение** $y(t)$.

Таким образом, операционный метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений характерен тем, что предварительно определяется не известная функция $y(t)$, удовлетворяющая данному дифференциальному уравнению, а соответствующая ей преобразованная, то есть изображение $Y(p) \stackrel{\cdot}{\longleftrightarrow} y(t)$. При этом отпадает необходимость определения постоянных интегрирования.

Решение типовых примеров

Решить дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях.

8.45 $y'' + y' - 2y = e^{-t}$, если $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение

1) Пусть $y(t) \xleftrightarrow{\cdot} Y(p)$, тогда

$$\begin{aligned} y'(t) &\xleftrightarrow{\cdot} pY(p) - y(0) = pY(p), \\ y''(t) &\xleftrightarrow{\cdot} p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1 \text{ и} \\ e^{-t} &\xleftrightarrow{\cdot} \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

2) Операторное уравнение имеет вид:

$$[p^2Y(p) - 1] + pY(p) - 2Y(p) = \frac{1}{p+1}.$$

3) После несложных преобразований получим операторное решение:

$$\begin{aligned} Y(p)(p^2 + p - 2) &= \frac{1}{p+1} + 1, \\ Y(p)(p+2)(p-1) &= \frac{p+2}{p+1}, \\ Y(p) &= \frac{p+2}{(p+1)(p+2)(p-1)}, \\ Y(p) &= \frac{1}{p^2 - 1}. \end{aligned}$$

4) Восстановим оригинал по данному изображению

$$\frac{1}{p^2 - 1} \xleftrightarrow{\cdot} \text{sh } t.$$

5) Следовательно, искомое частное решение $y(t) = \text{sh } t$.

Продифференцировав $y(t)$, убеждаемся, что оно действительно удовлетворяет данному уравнению.

$$y'(t) = (\text{sh } t)' = \text{ch } t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y''(t) = (\text{ch } t)' = \text{sh } t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Подставляя в данное уравнение $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$, получим тождество:

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2} - 2 \frac{e^t - e^{-t}}{2} = e^{-t} \Rightarrow e^{-t} = e^{-t}.$$

Проверим начальные условия

$$y(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0 \quad \text{и} \quad y'(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1.$$

Таким образом, уравнение решено верно.

8.46 $y'' - 2y' - 3y = e^{3t}$, если $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение

1) Обозначим изображение искомого решения $y(t)$:

$$y(t) \xleftrightarrow{\cdot} Y(p).$$

По таблице находим изображение функции

$$e^{3t} \leftarrow \frac{1}{p-3}.$$

2) Согласно формулам дифференцирования оригинала и заданным начальным условиям находим

$$\begin{aligned} y'(t) &\leftarrow pY(p), \\ y''(t) &\leftarrow p^2Y(p). \end{aligned}$$

3) Составим операторное уравнение:

$$p^2Y(p) - 2pY(p) - 3pY(p) = \frac{1}{p-3}.$$

4) Находим операторное решение:

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 - 2p - 3)(p-3)} = \frac{1}{(p+1)(p-3)^2}.$$

Разложим эту рациональную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2} = \frac{A}{(p-3)^2} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+1}.$$

После приведения к общему знаменателю в правой части этого равенства имеем тождество:

$$1 = A(p+1) + B(p-3)(p+1) + C(p-3)^2.$$

Применяя метод частных значений, получим:

$$\begin{array}{l|l} p = -1 & 1 = 16C \Rightarrow C = \frac{1}{16}; \\ p = 3 & 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}; \\ p = 1 & 1 = 2A - 4B + 4C \Rightarrow B = -\frac{1}{16}. \end{array}$$

Следовательно,

$$Y(p) = \frac{1}{4(p-3)^2} - \frac{1}{16(p-3)} + \frac{1}{16(p+1)}.$$

5) По таблице 8.1 (формулы 5 и 6) находим оригиналы. В результате частное решение данного дифференциального уравнения

$$y(t) = \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{16}e^{3t} + \frac{1}{16}e^{-t}.$$

Задания для решения в аудитории

8.47 $y'' + y = \cos t$, если $y(0) = y'(0) = 0$.

8.48 $y'' + y - 1 = 0$, если $y(0) = y'(0) = 0$.

8.49 $y'' - 3y' + 2y = e^t$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

8.50 $x'' + 2x' + 5x = 3$, если $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

8.51 $y'' + y' - 2y = e^t$, если $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

8.4 Решение систем дифференциальных уравнений операционным методом

Решение типовых примеров

8.52 Найти частное решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - x - y = t, \\ \frac{dy}{dt} + 4x + 3y = 2t, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Решение

1) Пусть $x(t) \leftarrow X(p)$ и $y(t) \leftarrow Y(p)$.

Тогда $t \leftarrow \frac{1}{p^2}$, $2t \leftarrow \frac{2}{p^2}$.

2) Согласно формулам дифференцирования оригинала и начальным условиям имеем

$$\begin{aligned} x' &\leftarrow pX(p), \\ y' &\leftarrow pY(p). \end{aligned}$$

3) С учетом введенных обозначений изображений искомых функций, их производных и начальных условий **вспомогательная система** имеет вид:

$$\begin{cases} pX(p) - X(p) - Y(p) = \frac{1}{p^2}, \\ pY(p) + 4X(p) + 3Y(p) = \frac{2}{p^2}. \end{cases}$$

После элементарных преобразований получим

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - Y(p) = \frac{1}{p^2}, \\ 4X(p) + (p+3)Y(p) = \frac{2}{p^2}. \end{cases}$$

Таким образом, имеем систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными $X(p)$ и $Y(p)$, которую решим по **правилу Крамера**.

4) Решение полученной системы находим по формулам Крамера

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -1 \\ 4 & p+3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{1}{p^2} & -1 \\ \frac{2}{p^2} & p+3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} p-1 & \frac{1}{p^2} \\ 4 & \frac{2}{p^2} \end{vmatrix}.$$

Предварительно вычислим определители 2-го порядка

$$\Delta = (p-1)(p+3) - 4(-1) = p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2,$$

$$\Delta_x = \frac{1}{p^2}(p+3) - \frac{2}{p^2}(-1) = \frac{1}{p^2}(p+3+2) = \frac{p+5}{p^2},$$

$$\Delta_y = (p-1)\frac{2}{p^2} - 4\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}(2p-2-4) = \frac{2(p-3)}{p^2}.$$

Итак, найдём решение вспомогательной системы, которое является собственно **операторным решением**, то есть изображением частного решения данной системы дифференциальных уравнений:

$$X(p) = \frac{p+5}{p^2(p+1)^2}, \quad Y(p) = \frac{2(p-3)}{p^2(p+1)^2}.$$

5) Разлагая рациональные дроби на сумму простейших, перейдём к оригиналам $x(t)$ и $y(t)$.

$$X(p) = \frac{p+5}{p^2(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{(p+1)^2} = -\frac{9}{p} + \frac{5}{p^2} + \frac{9}{p+1} + \frac{4}{(p+1)^2},$$

$$Y(p) = \frac{2(p-3)}{p^2(p+1)^2} = \frac{A_1}{p} + \frac{B_1}{p^2} + \frac{C_1}{p+1} + \frac{D_1}{(p+1)^2} = \frac{14}{p} - \frac{6}{p^2} - \frac{14}{p+1} - \frac{8}{(p+1)^2}.$$

Используя таблицу 8.1, восстановим оригиналы

$$\begin{cases} x(t) = -9 + 5t + 9e^{-t} + 4te^{-t}, \\ y(t) = 14 - 6t - 14e^{-t} - 8te^{-t}. \end{cases}$$

Совокупность этих функций и является частным решением (в виде параметрических уравнений) исходной системы дифференциальных уравнений.

8.53 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' + 2y + 5x = 0, \\ y' + 7y - x = 0, \end{cases}$$

если $x(0) = y(0) = 1$.

Решение

1) Пусть $x(t) \leftarrow X(p)$ и $y(t) \leftarrow Y(p)$.

2) Тогда $x'(t) = pX(p) - 1$,
 $y'(t) = pY(p) - 1$.

3) Составим вспомогательную систему

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + 2Y(p) + 5X(p) = 0, \\ pY(p) - 1 + 7Y(p) - X(p) = 0. \end{cases}$$

После преобразований имеем

$$\begin{cases} (p+5)X(p) + 2Y(p) = 1, \\ -X(p) + (p+7)Y(p) = 1. \end{cases}$$

4) Решение вспомогательной системы находим по формулам Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+5 & 2 \\ -1 & p+7 \end{vmatrix} = p^2 + 12p + 37;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & p+7 \end{vmatrix} = p+5;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p+5 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = p+6.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{p+5}{p^2 + 12p + 37}, \\ Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{p+6}{p^2 + 12p + 37}. \end{cases}$$

5) По изображениям находим оригиналы, то есть искомое частное решение системы:

а) выполним элементарные преобразования:

$$X(p) = \frac{p+5}{p^2 + 12p + 37} = \frac{(p+6)-1}{(p+6)^2 + 1} = \frac{p+6}{(p+6)^2 + 1} - \frac{1}{(p+6)^2 + 1},$$

$$Y(p) = \frac{p+6}{p^2 + 12p + 37} = \frac{p+6}{(p+6)^2 + 1}.$$

б) используя таблицу 8.1 (формулы 13, 14), окончательно имеем

$$\begin{cases} x(t) = e^{-6t} (\cos t - \sin t), \\ y(t) = e^{-6t} \cos t. \end{cases}$$

Задания для решения в аудитории

8.54 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$$

если $x(0) = 0, \quad y(0) = 5$.

8.55 Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2(x + y), \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = y(0) = 1$.

8.5 Приложения операционного исчисления

8.5.1 Решение задач прикладной механики

Из механики известно, что колебания материальной точки массы m описываются уравнением

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{1}{m} \cdot f(t). \quad (8.7)$$

Данное уравнение получено на основании второго закона Ньютона

$$ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\Sigma}. \quad (8.8)$$

В общем случае на материальную точку могут воздействовать:

а) так называемая **восстанавливающая сила** $F_{восст}$, пропорциональная отклонению x от положения равновесия, то есть $F_{восст} = -kx$, где k - некоторая постоянная («жесткость» упругой системы, например пружины (рессоры));

б) **сила сопротивления** $F_{сопр}$, направленная в сторону, противоположную направлению движения, и пропорциональная скорости движения точки, то есть $F_{сопр} = -\lambda v = -\lambda \frac{dx}{dt}$, где $\lambda = const \geq 0$;

в) **внешняя, или возмущающая, сила** $f(t)$.

Таким образом, **суммарная, или результирующая, сила**, действующая на материальную точку:

$$F_{\Sigma} = F_{восст} + F_{сопр} + f(t).$$

После подстановки в формулу (8.8) и элементарных преобразований и получим уравнение (8.7).

Уравнение (8.7) называют уравнением **вынужденных колебаний**. При $f(t) \equiv 0$ имеем уравнение **свободных колебаний**:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (8.9)$$

Если $F_{\text{сomp}} \neq 0$, то решение уравнения (8.9) соответствует **затухающим колебаниям**, если же $F_{\text{сomp}} \equiv 0$, то имеют место **гармонические (незатухающие) колебания**.

Замечание. Уравнения типа (8.7) описывают не только механические колебания, но и явления в электрических цепях.

Решение типовых задач

8.56 Материальная точка массы m движется под действием восстанавливающей силы $F_{\text{восст}} = -kx$, пропорциональной отклонению x и направленной в противоположную сторону, и силы сопротивления $F_{\text{сomp}} = -\lambda v$. В момент времени $t=0$ точка находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0 . Найти закон движения $x = x(t)$ точки, если $k = m$, $\lambda = 2m$, $x_0 = 1\text{ м}$ и $v_0 = 0\text{ м/с}$.

Решение

Согласно условию материальная точка совершает вдоль оси Ox **свободное затухающее движение**, которое описывается уравнением:

$$x''(t) + \frac{\lambda}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0,$$

или (при $k = m$ и $\lambda = 2m$)

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0.$$

Пусть $x(t) \leftarrow X(p)$, тогда с учетом начальных условий: $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, имеем

$$x'(t) \leftarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$x''(t) \leftarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p.$$

Составим операторное уравнение:

$$(p^2X(p) - p) + 2[pX(p) - 1] + X(p) = 0.$$

Найдём операторное решение:

$$X(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+1} = \frac{p+2}{(p+1)^2} = \frac{(p+1)+1}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

По таблице 8.1 (формулы 5 и 6) найдём оригинал – закон движения точки:

$$x(t) = e^{-t}(1+t).$$

8.57 Материальная точка массы m совершает прямолинейное колебание вдоль оси Ox под действием восстанавливающей силы $F_{восст} = -kx$, пропорциональной расстоянию x от начала координат и направленной к началу координат, и возмущающей силы $f(t) = A \cos t$. Найти закон движения $x = x(t)$ точки при начальных условиях $x(0) = 0$, $v(0) = 0$, если $k = m$, $A = 2m$.

Решение

По условию материальная точка совершает **вынужденные колебания** ($f(t) \neq 0$, а $F_{своб} = 0$), которые описываются уравнением:

$$x''(t) + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}f(t).$$

Полагая, что $k = m$, $A = 2m$, имеем

$$x''(t) + x = 2 \cos t.$$

Пусть $x(t) \xrightarrow{\cdot} X(p)$, тогда с учетом начальных условий получим, что

$$x''(t) \xrightarrow{\cdot} p^2 X(p), \text{ а } \cos t \xrightarrow{\cdot} \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Составим операторное уравнение:

$$p^2 X(p) + X(p) = \frac{2p}{p^2 + 1}.$$

Откуда

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}.$$

С помощью таблицы 8.1 (формула 11 при $\omega = 1$) найдём оригинал, то есть закон движения точки:

$$x(t) = t \sin t.$$

8.5.2 Решение прикладных задач теории электрических цепей

Решение типовых задач

8.58 Найти закон изменения тока $i(t)$ при включении постоянной электродвижущей силы (э.д.с.) E_0 в электрическую цепь, состоящую из последовательно соединённых катушки индуктивности и резистора с параметрами соответственно L и R , если в момент времени $t = 0$ ток $i = 0$ (рисунок 8.1).

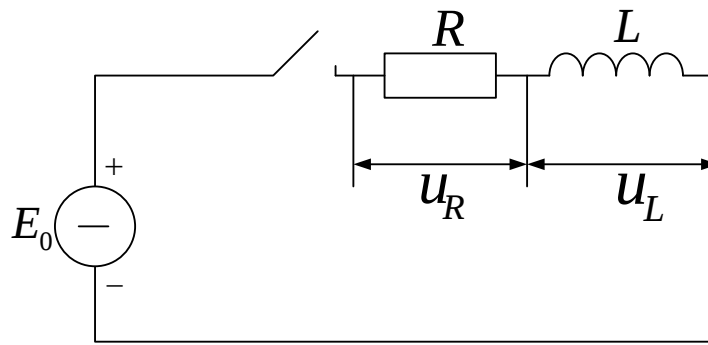


Рисунок 8.1

Решение

I. *Физическое обоснование*

В момент включения источника питания по цепи потечёт ток i , создающий падения напряжения на резисторе $u_R = iR$ и на катушке индуктивности $u_L = L \frac{di}{dt}$, так как согласно закону Ленца напряжение u_L уравнивается э.д.с. самоиндукции e_L , то есть

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}.$$

Для мгновенных значений по **второму закону Кирхгофа** э.д.с. источника и сумма падений напряжения на элементах в замкнутой цепи равны между собой, то есть

$$u_L + u_R = E_0.$$

После подстановки получим, что ток в данной электрической цепи удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \quad (E_0 = \text{const}).$$

II. *Применение операционного метода*

Пусть $i(t) \longleftrightarrow I(p)$, тогда $\frac{di}{dt} \longleftrightarrow pI(p)$ и $E_0 \longleftrightarrow \frac{E_0}{p}$.

Следовательно, операторное уравнение имеет вид

$$LpI(p) + RI(p) = \frac{E_0}{p}.$$

Откуда

$$I(p) = \frac{E_0}{p(Lp + R)}.$$

Разложим полученную дробь на простейшие (предварительно вынесем L за скобки):

$$\frac{E_0}{p(Lp + R)} = \frac{E_0}{Lp\left(p + \frac{R}{L}\right)} = \frac{E_0}{L} \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{R}{L}} \right).$$

После преобразований получим тождество

$$1 = A\left(p + \frac{R}{L}\right) + Bp.$$

$$\left. \begin{array}{l} p = -\frac{R}{L} \\ p = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 = -\frac{R}{L}B \Rightarrow B = -\frac{L}{R}, \\ 1 = \frac{R}{L}A \Rightarrow A = \frac{L}{R}. \end{array}$$

Таким образом,

$$I(p) = \frac{E_0}{p(Lp + R)} = \frac{E_0}{L} \left(\frac{L}{R}p - \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right) = \frac{E_0}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right).$$

Переходим к оригиналу:

$$i(t) = \frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Анализируя закон изменения тока, замечаем, что с момента включения в цепь постоянной э.д.с. ток возрастает от нуля (при $t=0$) до постоянной величины $\frac{E_0}{R}$ (при $t \rightarrow \infty$) (рисунок 8.2).

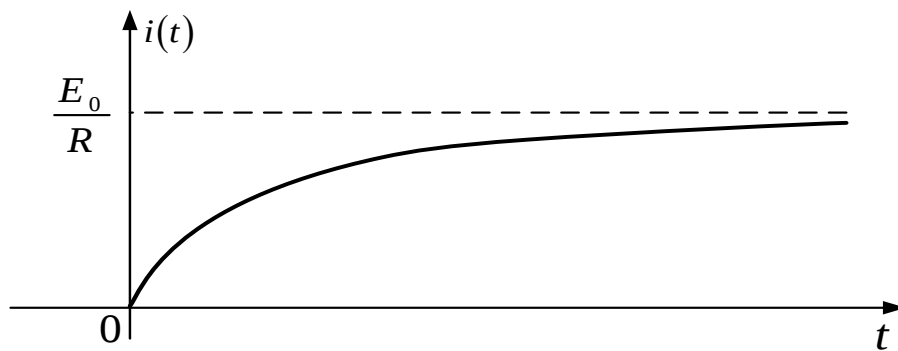


Рисунок 8.2

8.59 Найти закон изменения тока $i(t)$ при включении постоянной э.д.с. E_0 в последовательный колебательный контур с параметрами R , L и C при условии $i(0) = 0$.

Решение

По закону Кирхгофа для мгновенных значений запишем

$$u_L + u_R + u_C = E_0,$$

где $u_R = Ri$, $u_L = L \frac{di}{dt}$, $u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$.

После подстановки получим дифференциально-интегральное уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E_0.$$

Обозначим изображение функции-оригинала $i = i(t)$ через $I(p)$, то есть $i(t) \leftarrow I(p)$.

Тогда по правилу дифференцирования оригинала и правилу нахождения изображения интеграла от данной функции-оригинала находим

$$\frac{di}{dt} \leftarrow pI(p) \quad \text{и} \quad \int_0^t i(\tau) d\tau \leftarrow \frac{I(p)}{p}, \quad \text{а} \quad E_0 \leftarrow \frac{E_0}{p}.$$

Подставив найденные изображения, получим операторное уравнение

$$LpI(p) + RI(p) + \frac{I(p)}{Cp} = \frac{E_0}{p}.$$

Решая это алгебраическое уравнение относительно изображения $I(p)$, имеем

$$I(p) = \frac{E_0}{p \left(Lp + R + \frac{1}{Cp} \right)} \quad \text{или} \quad I(p) = \frac{E_0}{L \left(p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} \right)}.$$

Обозначим $\frac{R}{L} = 2\beta$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$.

Тогда, выделяя полный квадрат в знаменателе, получим

$$I(p) = \frac{E_0}{L(p^2 + 2\beta p + \omega_0^2)} = \frac{E_0}{L[(p + \beta)^2 + (\omega_0^2 - \beta^2)]}.$$

Рассмотрим случай, когда $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$. Положив $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$, имеем

$$I(p) = \frac{E_0}{L[(p + \beta)^2 + (\omega_0^2 - \beta^2)]} = \frac{E_0}{L\omega} \cdot \frac{\omega}{(p + \beta)^2 + \omega^2}.$$

По таблице с учетом свойства линейности восстановим оригинал

$$i(t) = \frac{E_0}{L\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t.$$

Вывод. В реальном колебательном контуре существуют свободные колебания тока, которые носят затухающий характер ($\beta = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания).

Закон изменения тока в реальном последовательном контуре представлен графически на рисунке 8.3.

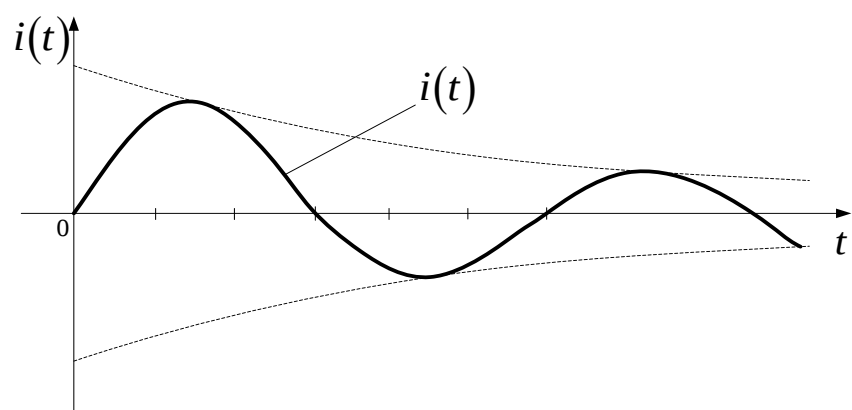


Рисунок 8.3

ГЛАВА 9 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

9.1 Двойной интеграл

На плоскости XOY рассмотрим некоторую замкнутую область σ , ограниченную замкнутой линией L . Пусть в σ задана функция $z = f(x, y)$, определенная, непрерывная и ограниченная в области σ (рисунок 9.1).

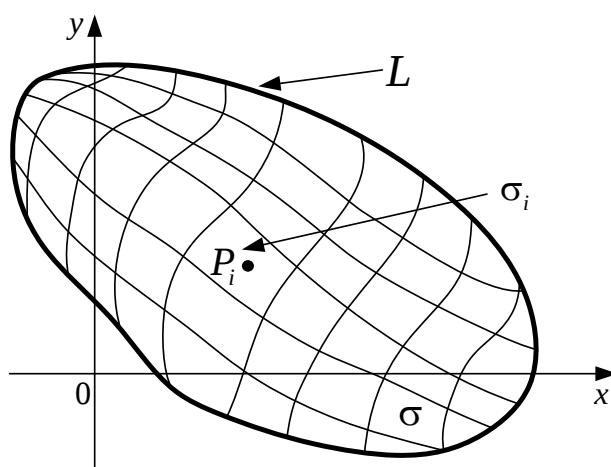


Рисунок 9.1

Определение: Если при стремлении к нулю шага разбиения области σ интегральные суммы $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции $z = f(x, y)$ по области σ и обозначается $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$.

Таким образом, по определению:

$$\lim_{\substack{\max \Delta\sigma_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma.$$

Область σ называется областью интегрирования, $f(x, y)$ - подынтегральной функцией, $f(x, y)\Delta\sigma$ - подынтегральным выражением, $d\sigma$ - элементом площади.

Если область интегрирования σ разбита на элементарные площадки $\Delta\sigma_i$ прямыми параллельными осям координат, то $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$ (площадь прямоугольника), тогда

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy.$$

Геометрический смысл двойного интеграла:

объем цилиндрического тела численно равен двойному интегралу от аппликаты $z = f(x, y) > 0$, взятому по области σ .

$$V = \lim_{\max \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma.$$

Физический смысл двойного интеграла:

масса неоднородной тонкой пластины численно равна двойному интегралу

$$m = \lim_{\max \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{i=n} \rho(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} \rho(x, y) d\sigma.$$

9.2 Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах

Область интегрирования σ называется ***правильной в направлении оси*** Ox (оси Oy), если любая прямая, параллельная оси Ox (оси Oy), пересекает границу L области σ не более двух раз (рисунок 9.2,а). Область σ считается также правильной, если часть её границы или вся граница L состоит из отрезков прямых, параллельных осям координат (рисунок 9.2,б).

Рассмотрим методы вычисления двойного интеграла по областям, правильным в направлении координатных осей; так как практически любую область можно представить в виде объединения правильных областей (рисунок

9.2,в), то согласно свойству 3 двойных интегралов, эти методы пригодны для их вычисления по любым областям.

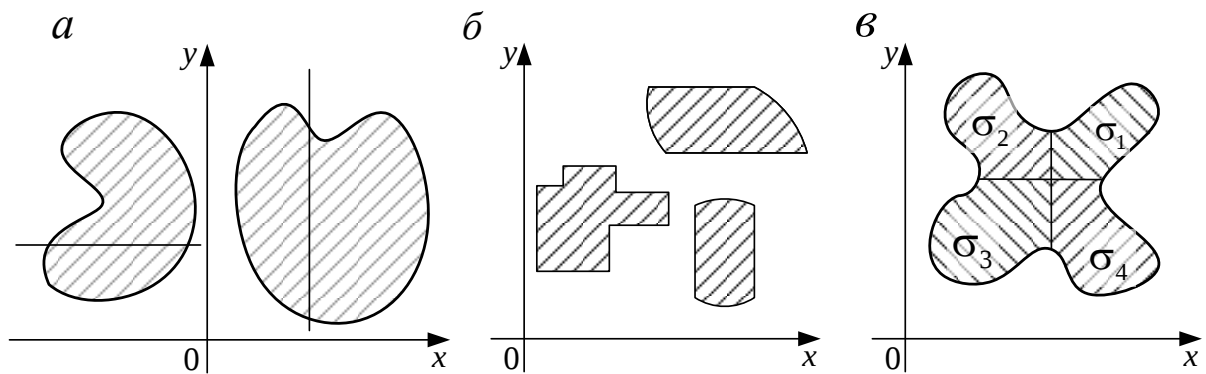


Рисунок 9.2

Пусть требуется вычислить $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$.

Предположим, что область интегрирования σ ограничена двумя непрерывными кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, и $\varphi_1 \leq \varphi_2$, и двумя прямыми $x=a$, $x=b$ ($a \leq x \leq b$) (рисунок 9.3).

Проведем через точку $(x, 0)$ оси Ox прямую, параллельную оси Oy . Эта прямая встречает кривые, ограничивающие область σ соответственно в точках C_1 (назовем точкой входа и обозначим ординату $y_{\text{вх}} = \varphi_1(x)$) C_2 (назовем точкой выхода и обозначим ординату $y_{\text{вых}} = \varphi_2(x)$).

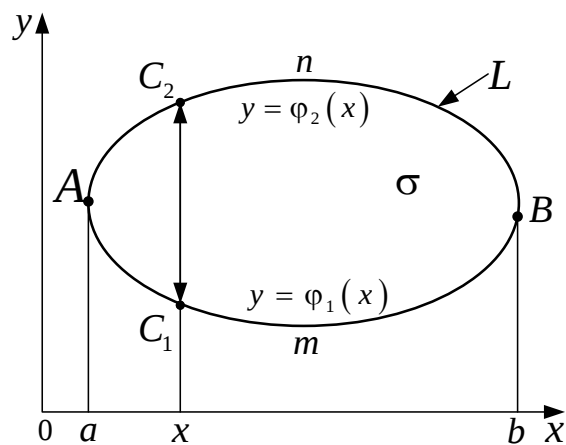


Рисунок 9.3

Для того чтобы вычислить двойной интеграл $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$ нужно сначала

вычислить определенный интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ считая $x = \text{const}$ (или, как

говорят, внутренний интеграл) нижней границей интегрирования служит ордината точки входа $y_{\text{вх}} = \varphi_1(x)$, а верхней границей - ордината точки выхода

$y_{\text{вых}} = \varphi_2(x)$ соответствующие данному фиксированному значению x .

Результат вычисления этого интеграла является только функцией от x .

Интегрируя теперь эту функцию в границах от a до b получим значение двойного интеграла.

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (9.1)$$

Если область σ ограничена двумя кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$ ($\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$) и двумя прямыми $y = c$ и $y = d$ ($c < d$) (рисунок 9.4), то можно доказать, что

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (9.2)$$

Здесь при внутреннем интегрировании $y = \text{const}$ а результат интегрирования есть функция от y , которую затем следует проинтегрировать в пределах от c до d .

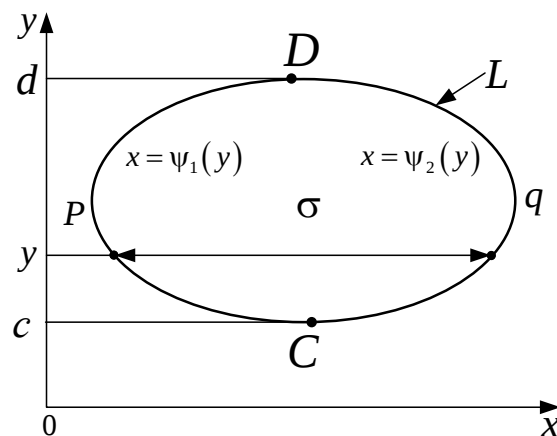


Рисунок 9.4

В формулах (9.1) и (9.2) границы внешних интегралов **всегда постоянны.** Интегралы, стоящие в правых частях (9.1) и (9.2) называются **повторными или двукратными интегралами.**

Из равенств (9.1) и (9.2) следует, что

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (9.3)$$

Переход от левой части равенства (9.3) к правой его части и обратно называется **изменением порядка интегрирования в повторном интеграле.**

Решение типовых примеров

Пример 9.1 Вычислить двойной интеграл $\int_0^2 dx \int_{x^2}^4 (x^2 - y) dy$.

Решение

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_{x^2}^4 (x^2 - y) dy &= \int_0^2 \left(x^2 y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^4 dx = \int_0^2 \left(\left(4x^2 - \frac{4^2}{2} \right) - \left(x^2 \cdot x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} \right) \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(4x^2 - 8 - x^4 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \int_0^2 \left(4x^2 - 8 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(4 \frac{x^3}{3} - 8x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \left(4 \frac{x^3}{3} - 8x - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{4 \cdot 2^3}{3} - 8 \cdot 2 - \frac{2^5}{10} \right) - \left(\frac{4 \cdot 0^3}{3} - 8 \cdot 0 - \frac{0^5}{10} \right) = \\ &= \frac{32}{3} - 16 - \frac{16}{5} = \frac{160 - 48}{15} - 16 = \frac{112 - 240}{15} = -\frac{128}{15}. \end{aligned}$$

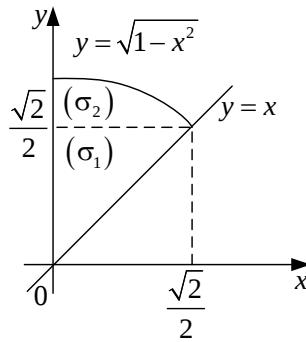
Пример 9.2 Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

Решение

Прежде всего, найдём область интегрирования, исходя из заданных пределов интеграла. Запишем уравнения линий, ограничивающих область (σ)

$y = x, \quad y = \sqrt{1-x^2}, \quad x = 0, \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Построив эти линии, получим область σ :



При изменении порядка интегрирования воспользуемся формулой (9.2). Область (σ) является правильной относительно оси Oy , но её правая граница состоит из двух участков, уравнения которых $y = x$, $y = \sqrt{1-x^2}$. Поэтому разобьём область (σ) на две части (σ_1) и (σ_2) , проведя прямую, параллельную оси Ox и проходящую через точку $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, в которой стыкуются указанные участки правой границы. Тем самым интеграл по области (σ) разобьётся на сумму двух интегралов и, следовательно,

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

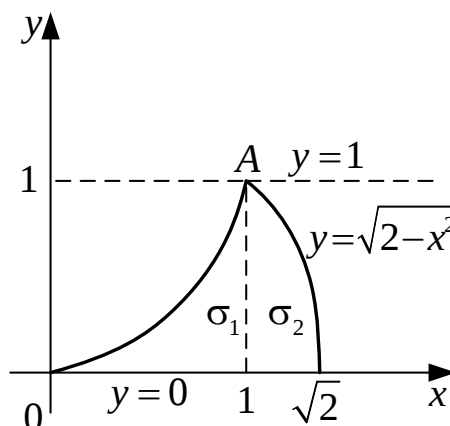
Пример 9.3 Изменить порядок интегрирования

$$Y = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$$

Решение

Построим область интегрирования, так как интеграл представляется суммой интегралов, то и область $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$,

$$\text{где } \sigma_1: \begin{matrix} x=0 & x=1 \\ y=0 & y=x^2 \end{matrix} \quad \sigma_2: \begin{matrix} x=1 & x=\sqrt{2} \\ y=0 & y=\sqrt{2-x^2} \end{matrix}$$



При перемене порядка интегрирования внутренние интегралы будут вычисляться по переменной x , поэтому уравнения линий, ограничивающих каждую из областей σ_1 и σ_2 , должны быть решены относительно этой переменной.

Проведя линию, параллельную оси Ox замечаем, что область $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ является простой относительно оси Oy . Все точки входа принадлежат линии $y = x^2$, а точки выхода – линии $y = \sqrt{2 - x^2}$. Разрешая эти уравнения относительно переменной x получим $x = \sqrt{y}$ ($x = -\sqrt{y}$ во внимание не принимается, так как линия находится в I четверти, а в ней $x \geq 0$) и $x = \sqrt{2 - y^2}$ (I четверть).

В области σ переменная y изменяется от $y = 0$ до $y = 1$, тогда

$$Y = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx.$$

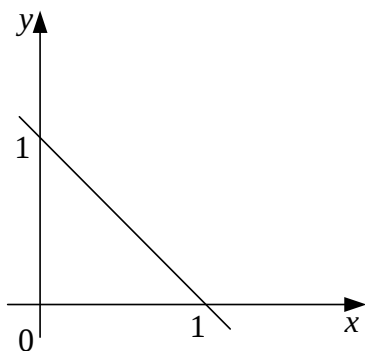
Пример 9.4 Вычислить двойной интеграл от функции $z = x + y$ по области, представляющей собой треугольник с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,1)$ и $(1,0)$.

Решение

Здесь $a = 0$, $b = 1$, $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = 1 - x$.

Тогда

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y) dy = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



Пример 9.5 Найти двойной интеграл от функции $z = 3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}y$ по прямоугольной области (σ): $-1 \leq x \leq 1$, $-4 \leq y \leq 4$.

Решение

Найдём двойной интеграл $\iint_{(\sigma)} \left(3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}y \right) dx dy$.

Возьмём повторный интеграл сначала по переменной y , затем по переменной x :

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-4}^4 \left(3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}y \right) dy = 2 \cdot 2 \int_0^1 \left(3y - \frac{1}{2}xy + 14y^2 \right) \Big|_0^4 = 4 \int_0^1 \left(13\frac{1}{7} - 2x \right) dx =$$

$$= 4 \left(13\frac{1}{7}x - x^2 \right) \Big|_0^1 = 48\frac{4}{7}.$$

Получим аналогичный результат, интегрируя сначала по переменной x , а затем по переменной y :

$$\int_{-4}^4 dy \int_{-1}^1 \left(3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}y \right) dx = 4 \int_0^4 \left(3x - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{7}xy \right) \Big|_0^1 dy = 4 \int_0^4 \left(2\frac{3}{4} + \frac{1}{7}y \right) dy =$$

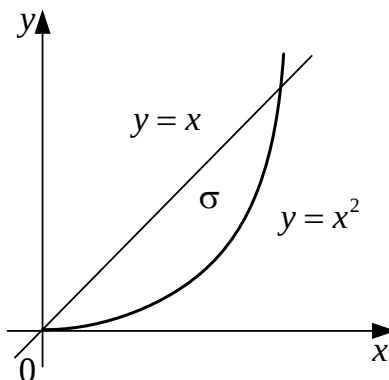
$$= 4 \left(2\frac{3}{4}y + \frac{1}{14}y^2 \right) \Big|_0^4 = 48\frac{4}{7}.$$

Пример 9.6 Вычислить двойной интеграл $\iint_{(\sigma)} (x^2 + 5xy) dx dy$ по области

(σ) , ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$.

Решение

Область (σ) изображена на рисунке. Линии $y = x$, $y = x^2$ пересекаются в точках $(0, 0)$ и $(1, 1)$.



Интегрируя сначала по переменной y , затем по переменной x , получаем

$$\iint_{(\sigma)} (x^2 + 5xy) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + 5xy) dy = \int_0^1 dx \left(x^2y + 5x\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^x =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{7}{2}x^3 - x^4 - \frac{5}{2}x^5 \right) dx = \left(\frac{7}{8}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{12}x^6 \right) \Big|_0^1 = \frac{31}{120}.$$

Правильность результата можно проверить, изменив порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} (x^2 + 5xy) dx dy &= \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (x^2 + 5xy) dx = \int_0^1 dy \left(\frac{1}{3} x^3 y + \frac{5}{2} x^2 y \right) \Big|_y^{\sqrt{y}} = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2} y^2 - \frac{17}{6} y^3 \right) dy = \left(\frac{2}{15} y^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{6} y^3 - \frac{17}{24} y^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{31}{120}. \end{aligned}$$

Задания для решения в аудитории

Определить, по какой переменной взят интеграл, изобразить область интегрирования:

$$9.7 \quad \int_1^2 \int_{-\sqrt{x}}^{x^3} f(x, y) dx dy$$

$$9.8 \quad \int_0^2 \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy$$

$$9.9 \quad \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dx dy.$$

$$9.10 \quad \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dx dy.$$

$$9.11 \quad \int_{-3}^0 \int_{-x}^3 f(x, y) dx dy + \int_0^3 \int_x^3 f(x, y) dx dy.$$

Построить область интегрирования и изменить порядок интегрирования:

$$9.12 \quad \int_0^1 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$$

$$9.13 \quad \int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$9.14 \quad \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

Вычислить интегралы

$$9.15 \quad \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x - y + 1) dy$$

$$9.16 \quad \iint_{\sigma} (x + y^3) dx dy; \quad \sigma: x=1, x=2, y=0, y=2.$$

$$9.17 \quad \iint_{\sigma} \frac{x^2}{y^2} dx dy; \quad \sigma: y=x, y=\frac{1}{x}, x=2.$$

$$9.18 \quad \iint_{\sigma} (x^2 + y) dx dy; \quad \sigma: y=\frac{1}{2}x, y=2x, xy=2, (x \geq 0).$$

$$9.19 \quad \iint_{\sigma} x^2 dx dy; \quad \sigma: y=x, y=\frac{1}{x}, x=2.$$

$$9.20 \quad \iint_{\sigma} x dx dy; \quad \sigma: \text{треугольник } ABC, A(0,0), B(1,0), C(0,1).$$

9.3 Замена переменных в двойном интеграле

9.3.1 Общий случай

Пусть переменные x и y связаны с переменными u и v соотношениями $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, где $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ – непрерывные и дифференцируемые функции, взаимно однозначно отображающие область σ плоскости Oxy на область σ_1 плоскости O_1uv , при этом якобиан

$$J = J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Сохраняет постоянный знак в σ . Тогда верна формула замены переменных в двойном интеграле

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} F(x, y) dy dx &= \iint_{\sigma_1} F(f(u, v); \varphi(u, v)) d\sigma_1 = \\ &= \int_{v_1}^{v_2} dv \int_{\Theta_1(v)}^{\Theta_2(v)} F(f(u, v), \varphi(u, v)) \cdot |J| \cdot du \end{aligned} \quad (9.4)$$

(где $d\sigma_1 = |J| du dv$).

Таким образом, чтобы произвести замену переменных в двойном интеграле, нужно заменить:

1. x и y по формулам $x = f(u, v)$; $y = \varphi(u, v)$;
2. $dx dy$ на $|J| du dv$;
3. область интегрирования σ на область σ_1 .

Решение типовых примеров

Пример 9.21 Вычислить $\iint_{\sigma} (y - x) dx dy$, если область σ ограничена прямыми:

$$y = x + 1, \quad y = x - 3, \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}x + 5.$$

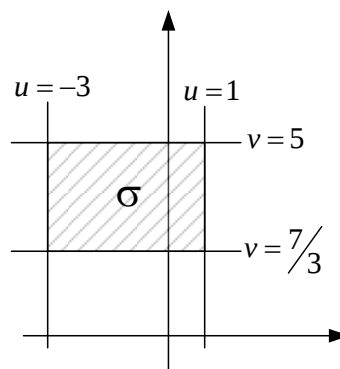
Непосредственное вычисление этого двойного интеграла было бы затруднительным; однако простая замена переменных позволяет свести этот интеграл к интегралу по прямоугольнику, стороны которого параллельны осям координат.

Положим $u = y - x$ $v = y + \frac{1}{3}x$.

Тогда прямые $y = x + 1$ $y = x - 3$ перейдут, соответственно, в прямые $u = 1$ и $u = -3$ на плоскости Ouv ;

прямые же $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + 5$

перейдут в прямые $v = \frac{7}{3}$, $v = 5$.



Следовательно, заданная область σ преобразуется в прямоугольную область σ_1 .

Остается вычислить якобиан преобразования. Для этого выразим x и y через u и

v . Получим: $x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v$, $y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v$ следовательно

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4},$$

$$|J| = \frac{3}{4}.$$

Тогда по формуле (9.4) получим

$$\iint_{\sigma} (y-x) dx dy = \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v \right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v \right) \right] \frac{3}{4} du dv = \frac{3}{4} \iint_{\sigma} u du dv = \frac{3}{4} \int_{\frac{7}{3}}^5 dv \int_{-3}^1 u du = -8.$$

Пример 9.22 Вычислить $\iint_{\sigma} (x+y)^3 (x-y)^2 dx dy$.

Область σ – квадрат, ограниченный линиями:

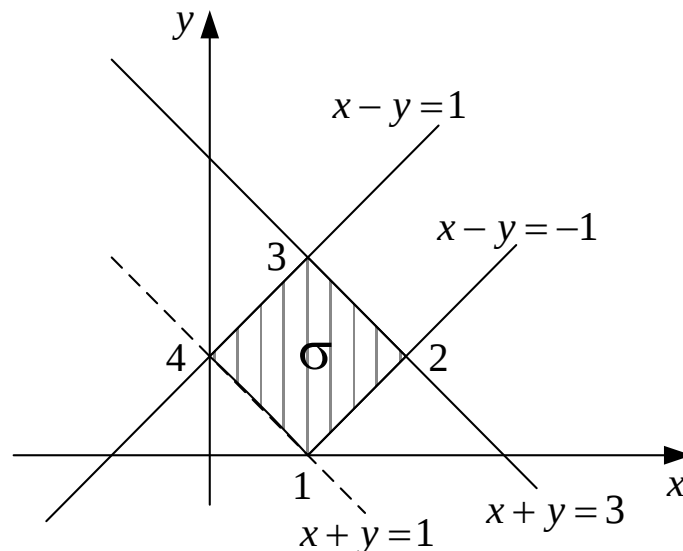
$$x+y=1, \quad x-y=1, \quad x+y=3, \quad x-y=-1.$$

$$\begin{cases} x+y=u; \\ x-y=v. \end{cases}$$

Положим $2x = u + v \Rightarrow x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}.$

Тогда якобиан преобразования:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \text{ то есть } |I| = \frac{1}{2}.$$



$$\begin{cases} x+y=u; \\ x-y=v. \end{cases}$$

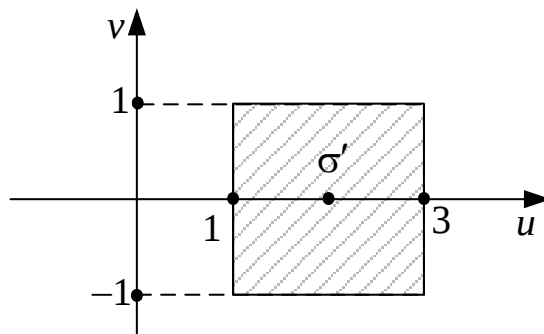
1) $x=1, y=0$, тогда $u=1, v=1$. 2) $x=2, y=1$, тогда $u=3, v=1$.

3) $x=1, y=2$, тогда $u=3, v=-1$. 4) $x=0, y=1$, тогда $u=1, v=-1$.

Следовательно, $\iint_{\sigma} (x+y)^3 (x-y)^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\sigma'} u^3 v^2 du dv$.

Так как область σ' также является квадратом, то

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (x+y)^3 (x-y)^2 dx dy &= \frac{1}{2} \int_1^3 u^3 du \int_{-1}^1 v^2 dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 u^3 \left(\frac{1}{3} v^3 \right) \Big|_{-1}^1 du = \frac{1}{6} \int_1^3 u^3 (1+1) du = \frac{1}{12} u^4 \Big|_1^3 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$



9.3.2 Вычисление двойных интегралов в полярной системе координат

Воспользуемся формулой замены переменных:

$$\iint_{\sigma} F(x, y) dx dy = \iint_{\sigma_1} F(f(u, v), \varphi(u, v)) |J| du dv.$$

При этом известно, что $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$

В этом случае Якобиан имеет вид:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \end{matrix} \right| = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho.$$

Тогда

$$\iint_{\sigma} F(x, y) dx dy = \iint_{\sigma_1} F(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (9.5)$$

Здесь σ_1 - новая область значений, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$.

В обобщённых полярных координатах, для которых $\begin{cases} x = a\rho \cos \varphi; \\ y = b\rho \sin \varphi \end{cases}$, где

$\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, имеем (так как якобиан $J = ab\rho$):

$$\iint_{\sigma} F(x, y) dx dy = ab \iint_{\sigma_1} F(a\rho \cos \varphi, b\rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (9.6)$$

Представление двойных интегралов в виде повторных в правых частях формул (9.5), (9.6) приводит к разным пределам в зависимости от того, где находится полюс O полярной системы координат: вне, внутри или на границе области σ .

1. Если полюс O полярной системы координат находится вне области σ ограниченной лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) и линиями AmB , AnB (из уравнения соответственно $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi)$, $\rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$) - функции заданные на отрезке $[\alpha; \beta]$), то двойной интеграл в полярных координатах сводится к повторному интегралу по правилу (рисунок 9.5)

$$\iint_{\sigma} F(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (9.7)$$

2. Если полюс O находится внутри области σ и уравнение границы области σ в полярной системе координат имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, то в формуле (12.7) $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, $\rho_1(\varphi) = 0$, $\rho_2(\varphi) = \rho(\varphi)$ (рисунок 12.6)

$$\iint_{\sigma} F(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} F(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (9.8)$$

3. Если полюс O находится на границе области σ и уравнение границы области σ в полярной системе координат имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, то в формуле (9.7) $\rho_1(\varphi) = 0$, $\rho_2(\varphi) = \rho(\varphi)$, а α и β могут принимать различные значения (рисунок 9.7, 9.8)

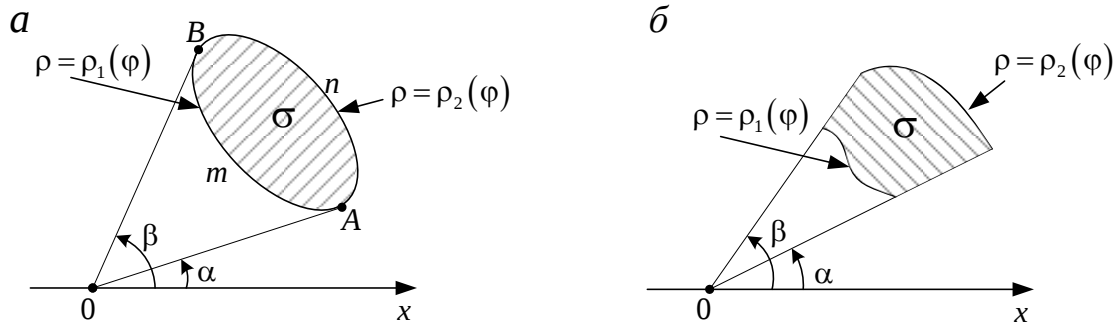


Рисунок 9.5

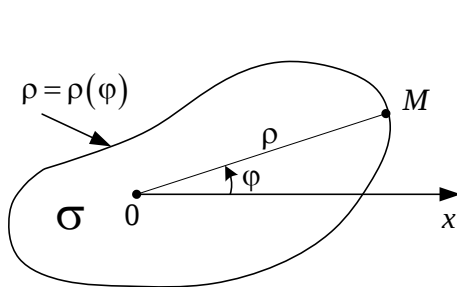


Рисунок 9.6

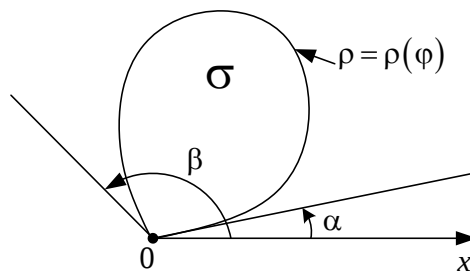


Рисунок 9.7

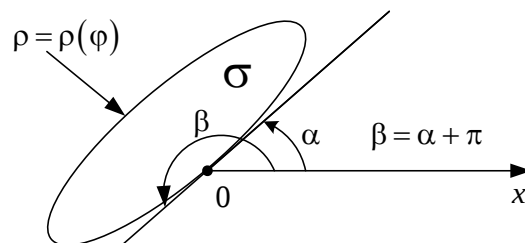


Рисунок 9.8

Аналогичные формулы имеют место и для случая обобщенных полярных координат.

Решение типовых примеров

Пример 9.23 Вычислить $\iint_{\sigma} \sqrt{4-x^2-y^2} d\sigma$, где σ -круг радиуса $R=2$ и

центром в начале координат.

Если область σ – круг или его часть, то многие интегралы проще вычислять в полярных координатах.

Так как $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$ то уравнение окружности $x^2 + y^2 = 4$ будет иметь вид:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4, \text{ то есть } \rho^2 = 4.$$

Согласно формулам (9.5) и (9.8), имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \sqrt{4-x^2-y^2} d\sigma &= \iint_{\sigma} \sqrt{4-\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi} \rho d\rho d\varphi = \iint_{\sigma} \sqrt{4-\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4-\rho^2} \rho d\rho = \left| \begin{array}{l} 4-\rho^2 = t^2 \\ -2\rho d\rho = 2tdt \\ \rho d\rho = -tdt \end{array} \right| = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_2^0 t^2 dt = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3} 2\pi = \frac{16}{3} \pi. \end{aligned}$$

Пример 9.24 Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В интеграле $\iint_{\sigma} dx dy$, выражающем площадь эллипса в декартовой

системе координат, перейдём к обобщенным полярным координатам.

Уравнение эллипса в обобщенных полярных координатах имеет вид $\rho = 1$.

Следовательно, согласно формуле (9.6), получаем:

$$\iint_{\sigma} dx dy = \iint_{\sigma_1} ab \rho d\rho d\varphi = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = \pi ab.$$

Задания для решения в аудитории

Вычислить

9.25 $\iint_{\sigma} (2x - y) dx dy$, где σ - параллелограмм, ограниченный прямыми $x + y = 1$, $x + y = 2$, $2x - y = 1$, $2x - y = 3$.

9.26 $\iint_{\sigma} dx dy$, где область σ ограничена линиями $xy = 1$, $xy = 2$, $x = y$, $y = 3x$.

Указание: произвести замену переменных $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$.

9.27 $\iint_{\sigma} dx dy$, где область σ ограничена линиями $y = x$, $y = x + 3$, $y = 1 - 2x$, $y = 5 - 2x$.

9.28 $\iint_{\sigma} xy dx dy$, где область σ ограничена параболой $y^2 = 4x$, $y^2 = 9x$ и гиперболами $xy = 1$, $xy = 5$.

Указание: произвести замену переменных $xy = u$, $\frac{y^2}{x} = v$.

9.29 $\iint_{\sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, если σ - 1-ая четверть круга $x^2 + y^2 \leq a^2$.

9.30 $\iint_{\sigma} \sqrt{x^2 + y^2 - 9} dx dy$, $\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25; \\ x^2 + y^2 \geq 9. \end{cases}$

9.31 $\iint_{\sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $\sigma: x^2 + y^2 = 2x$.

9.32 $\iint_{\sigma} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi$, если $\sigma: \rho \geq R$; $\rho = 2R \sin \varphi$.

9.433 $\iint_{\sigma} \rho^3 d\rho d\varphi$, σ ограничена полярной осью и кривой

$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Кривая $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ - лемниската.

Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования:

$$9.34 \quad \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy, \text{ если } \sigma: x^2 + y^2 \leq ax - \text{ круг.}$$

$$9.35 \quad \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y) dy.$$

9.4 Тройной интеграл

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области $V \in R^3$, ограниченной некоторой замкнутой кусочно-гладкой поверхностью S .

Определение: Если $\lim_{\substack{\max \Delta V_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ существует и не зависит

ни от способа разбиения тела V на частичные ΔV_i , ни от выбора в каждой из них точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$, то он называется тройным интегралом функции $f(x, y, z)$ по области (объёму) V и обозначается

$$\iiint_V f(x, y, z) dV.$$

Таким образом, по определению

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{\substack{\max \Delta V_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i. \quad (9.10)$$

Механический смысл тройного интеграла

Если считать $f(x, y, z)$ объемной плотностью распределения вещества в области объема V , то тройной интеграл равен массе всего вещества, заключенного в объеме V

$$m = \iiint_V f(x, y, z) dV.$$

9.4.1 Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

В декартовой системе координат область V удобно разбивать на элементарные области плоскостями, параллельными координатным плоскостям; при этом элемент объёма $dV = dx dy dz$.

Считаем область V правильной (то есть такой, что прямые, параллельные осям координат, пересекают границу области V не более чем в двух точках). Для правильной области V справедливы неравенства (рисунок

9.9): $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, $\psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$ и следующая формула для тройного интеграла:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (9.11)$$

Таким образом, при вычислении тройного интеграла в случае простейшей правильной области V вначале интегрируют функцию $f(x, y, z)$ по одной из переменных (например, z) при условии, что оставшиеся две переменные принимают любые постоянные значения в области интегрирования, затем результат интегрируют по второй переменной (например, y) при любом постоянном значении третьей переменной в V и, наконец, выполняют интегрирование по третьей переменной (например, x) в максимальном диапазоне её изменения в V .

Более сложные области интегрирования разбиваются на конечное число правильных областей, и результаты вычисления по этим областям суммируются. В частности, если область интегрирования – прямоугольный параллелепипед, задаваемый неравенствами $V = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\}$, то

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x, y, z) dz.$$

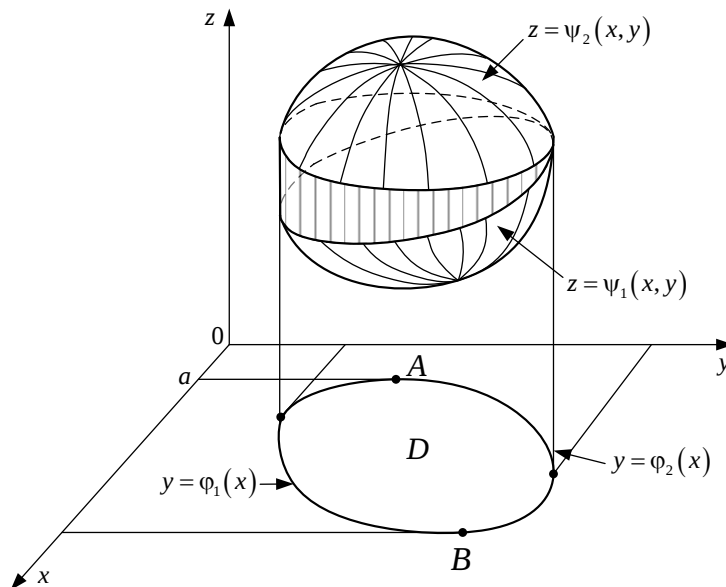
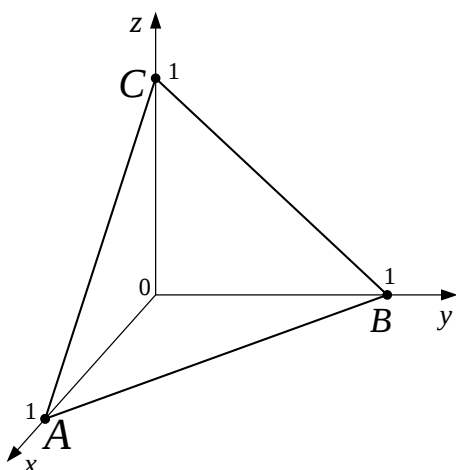


Рисунок 9.9

Решение типовых примеров

Пример 9.36 Вычислить $\iiint_V (z-1) dV$, если областью интегрирования является пирамида, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Решение



Областью σ , в которую проектируется область интегрирования V , является треугольник AOB в плоскости xOy , ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

Так как $z_{\text{вх}}=0$, $z_{\text{вых}}=1-x-y$, то на основании формулы (9.11) имеем:

$$\iiint_V (z-1)dV = \iint_{\sigma} d\sigma \int_0^{1-x-y} (z-1)dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (z-1)dz.$$

Вычисляем последовательно интегралы:

$$1) \int_0^{1-x-y} (z-1)dz = \frac{(z-1)^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} = \frac{(-x-y)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{(x+y)^2 - 1}{2};$$

$$2) \int_0^{1-x} \frac{(x+y)^2 - 1}{2} dy = \frac{1}{2} \left[\frac{(x+y)^3}{3} \Big|_0^{1-x} - y \Big|_0^{1-x} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{x^3}{3} - 1 + x \right) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} - \frac{1}{3};$$

$$3) \int_0^1 \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \right) dx = -\frac{x^4}{24} \Big|_0^1 + \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} x \Big|_0^1 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{8}.$$

$$\text{Итак, } \iiint_V (z-1)dV = -\frac{1}{8}.$$

9.5 Замена переменных в тройном интеграле

9.5.1 Переход к цилиндрическим координатам

При вычислении тройного интеграла в некоторых случаях удобно применить метод подстановки, то есть произвести замену переменных по аналогии с двойным интегралом. В этом случае $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$.

Переход от одной системы координат к другой осуществляется с

помощью якобиана $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$, в котором $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$,

$z = z(u, v, w)$ - непрерывные дифференцируемые функции.

Получим формулу:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |I| \cdot du dv dw.$$

Отнесём область V к системе цилиндрических координат. Положение точки $M(x, y, z)$ в пространстве $Oxyz$ определяется тремя **цилиндрическими координатами** (ρ, φ, z) , где (ρ, φ) - полярные координаты её проекции на плоскость xOy и z - её аппликата. Установим связь между декартовыми и цилиндрическими координатами, применяя следующие соотношения $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$.

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \cdot \rho \cdot d\rho d\varphi dz - \text{формула перехода к}$$

цилиндрическим координатам в тройном интеграле.

Вычисление тройного интеграла сводится к трёхкратному интегралу, при этом удобно внешний интеграл брать по переменной φ , средний – по переменной ρ , внутренний – по переменной z .

Получим формулу вычисления тройного интеграла в системе цилиндрических координат:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz. \quad (9.12)$$

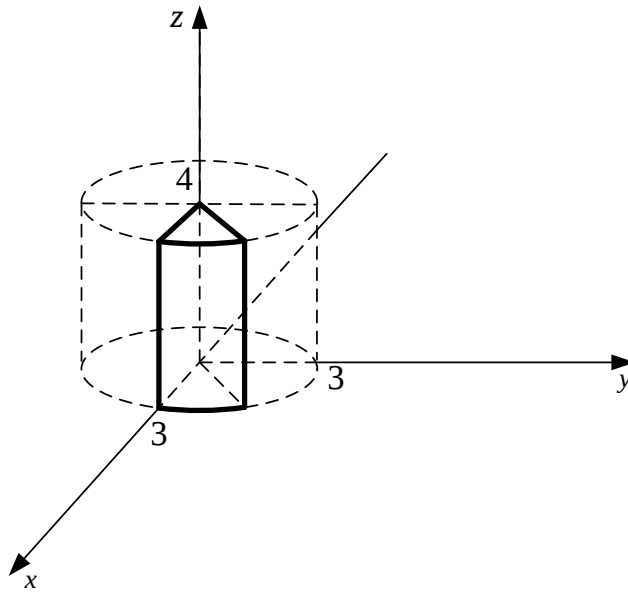
Применение цилиндрических координат удобно в случае, когда область интегрирования V образована цилиндрической поверхностью, а также, если подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2, z)$.

Решение типовых примеров

Пример 9.37 Вычислить интеграл от функции $u = z\sqrt{x^2 + y^2}$ по области, ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 = 9$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = 4$, $x \geq 0$.

Решение

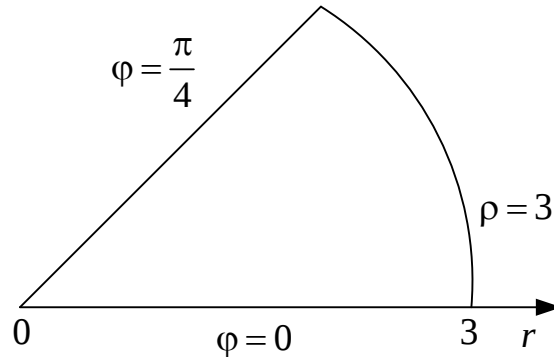
Построим область $V: x^2 + y^2 = 9$ - прямой круговой цилиндр $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = 4$ - плоскости.



Так как область интегрирования V образована цилиндрической поверхностью, то удобно перейти к цилиндрическим координатам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad \text{где } \sqrt{x^2 + y^2} = \rho.$$

Определим новые границы интегрирования: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \rho \leq 3$, $0 \leq z \leq 4$.



Применим формулу (9.12) вычисления тройного интеграла в системе цилиндрических координат

$$\begin{aligned} \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^3 \rho d\rho \int_0^4 z \cdot \rho dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^3 \rho^2 d\rho \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^4 = \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^3 = 72 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 18\pi. \end{aligned}$$

9.5.2 Переход к сферическим координатам

Другим случаем замены переменных в тройном интеграле является переход к сферическим координатам.

Отнесём область V к системе сферических координат. Положение точки $M(x, y, z)$ в пространстве $Oxyz$ определяется тремя **сферическими координатами** (ρ, φ, θ) , где (ρ, φ) - полярные координаты её проекции на плоскость, xOy и θ - угол отклонения радиус-вектора точки от оси Oz . Установим связь между декартовыми и сферическими координатами, применяя следующие соотношения

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta.$$

Формула перехода к сферическим координатам в тройном интеграле:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_V f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \end{aligned} \quad (9.13)$$

Применение сферических координат удобно в случае, когда область интегрирования V - шар с центром в начале координат или его часть, а также, если подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2 + z^2)$.

Решение типовых примеров

Пример 9.38 Вычислить интеграл от функции $u = \frac{1}{5 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ по

области, ограниченной сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Решение

Так как областью интегрирования является шар с центром начале координат и радиусом $R = 2$, то удобно перейти к сферическим координатам, применяя соотношения $x = \rho \cos \varphi \sin \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, $z = \rho \cos \theta$, где $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

Граница области V - сфера, уравнение которой имеет вид $\rho = 2$.

Подынтегральная функция в результате замены переменных примет вид: $u = \frac{1}{5 + \sqrt{\rho}}$.

Определим новые границы интегрирования: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Применяя формулу (9.13), получим:

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{1}{5 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \cdot \frac{1}{5 + \rho} d\rho = \\
&= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \frac{(\rho^2 - 25) + 25}{\rho + 5} d\rho = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(\rho - 5 + \frac{25}{\rho + 5} \right) d\rho = \\
&= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} - 5\rho + 25 \ln |\rho + 5| \right) \Big|_0^2 = (25 \ln 7 - 8) \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\
&= (25 \ln 7 - 8) \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi \Big|_0^{2\pi} = -2\pi (25 \ln 7 - 8) \cos \theta \Big|_0^\pi = 4\pi (25 \ln 7 - 8).
\end{aligned}$$

Задания для решения в аудитории

9.39 Свести тройной интеграл $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ к трехкратному,

если область V лежит в первом октанте и ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z^2$.

9.40 Вычислить $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$ по области V , ограниченной плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

9.41 Вычислить $\iiint_V 2x dx dy dz$ по области V , ограниченной плоскостями $z = 0$, $z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

9.42 Вычислить $\iiint_V z dx dy dz$, где область V определяется неравенствами $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$; $x \leq y \leq 2x$; $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

9.43 Вычислить $\iiint_V (1 - y)xz dx dy dz$, где область V : $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1 - x - y$.

9.44 Вычислить тройной интеграл $\iiint_V xyz dx dy dz$, где V ограничена поверхностями: $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$.

9.45 Вычислить $\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$, где V : $x=1, x=2, y=1, y=2, z=1, z=2$.

9.46 Вычислить $\iiint_V (x^2 + y^2) dxdydz$, если областью интегрирования является цилиндр, ограниченный поверхностями $x^2 + y^2 = R^2, z=0, z=H$.

9.47 Вычислить $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$, где область V ограничена параболоидом вращения $x^2 + y^2 = 2z + 3$ и плоскостью Oxy .

9.48 Вычислить $\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$, если область V ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$ и плоскостями $y=0, z=0, z=a$.

9.49 Вычислить $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$, если область V ограничена полусферой $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$.

9.50 Вычислить $\iiint_V (x^2 + y^2) dxdydz$, если V – верхняя половина шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$.

9.6 Приложения кратных интегралов

9.6.1 Приложения двойных интегралов

1. Площадь S плоской области σ на плоскости Oxy вычисляется с помощью двойного интеграла

$$S = \iint_{\sigma} dxdy. \quad (9.14)$$

2. Пусть требуется вычислить объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$ и областью σ в плоскости xOy . Учитывая геометрический смысл двойного интеграла, будем иметь:

$$V = \iint_{\sigma} f(x, y) dxdy. \quad (9.15)$$

Если тело ограничено сверху поверхностью $z = f_1(x, y) \geq 0$, а снизу - поверхностью $z = f_2(x, y) \geq 0$, причем проекцией обеих поверхностей на

плоскость xOy является область σ , то объем V этого тела равен разности объемов 2-х цилиндрических тел: $V = V_1 - V_2$, где $V_1 = \iint_{\sigma} f_1(x, y) d\sigma$;
 $V_2 = \iint_{\sigma} f_2(x, y) d\sigma$.

$$V = \iint_{\sigma} [f_1(x, y) - f_2(x, y)] d\sigma, \quad (9.16)$$

формула (9.16) верна, если $f_1(x, y) \geq f_2(x, y)$.

Если в области функция $z = f(x, y)$ меняет знак, то разбиваем область σ на две части: σ_1 , где $f(x, y) \geq 0$; и σ_2 , где $f(x, y) \leq 0$. Будем считать, что области σ_1 и σ_2 таковы, что двойные интегралы по этим областям существуют. Тогда

$$V = \left| \iint_{\sigma_1} f(x, y) d\sigma_1 \right| + \left| \iint_{\sigma_2} f(x, y) d\sigma_2 \right|.$$

3. Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \sigma$, где функция $f(x, y)$, а так же её частные производные первого порядка, непрерывны в области σ . Тогда её площадь S вычисляется по формуле

$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy. \quad (9.17)$$

4. Предположим, что плоская пластина σ имеет поверхностную плотность распределения масс $f(x, y)$ непрерывную в σ . Тогда масса этой пластины вычисляется по формуле

$$m = \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy. \quad (9.18)$$

5. Моменты инерции I_x , I_y и I_0 плоской материальной пластины σ с поверхностной плотностью $f(x, y)$ относительно координатных осей Ox , Oy и начала координат $O(0, 0)$ соответственно вычисляются по формулам

$$I_x = \iint_{\sigma} y^2 f(x, y) dx dy; \quad I_y = \iint_{\sigma} x^2 f(x, y) dx dy;$$

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_{\sigma} f(x, y) (x^2 + y^2) dx dy.$$

Для однородных пластин $f(x, y) = \text{const}$, для простоты в этом случае обычно считают $f(x, y) = 1$. Тогда

$$I_x = \iint_{\sigma} y^2 dx dy; \quad I_y = \iint_{\sigma} x^2 dx dy; \quad I_0 = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) dx dy.$$

6. Координаты центра тяжести материальной пластины σ с плотностью $f(x, y)$ вычисляются по формулам

$$x = \frac{S_y}{m}; \quad y = \frac{S_x}{m},$$

где m - масса пластины, $S_x = \iint_{\sigma} y f(x, y) dx dy$ и $S_y = \iint_{\sigma} x f(x, y) dx dy$ - статические моменты пластины σ относительно осей Ox и Oy соответственно.

Тогда координаты центра тяжести плоской фигуры σ определяются по формулам

$$x = \frac{\iint_{\sigma} x f(x, y) dx dy}{\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy}; \quad y = \frac{\iint_{\sigma} y f(x, y) dx dy}{\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy}.$$

В случае однородной пластины соответственно имеем

$$x = \frac{\iint_{\sigma} x dx dy}{\iint_{\sigma} dx dy}; \quad y = \frac{\iint_{\sigma} y dx dy}{\iint_{\sigma} dx dy}. \quad (9.19)$$

9.6.2 Приложения тройных интегралов

1. Объём пространственного тела вычисляется с помощью тройного интеграла

$$V = \iiint_V dV = \iiint_V dx dy dz. \quad (9.20)$$

2. Вычисление массы пространственной области V с объемной плотностью $\gamma = f(x, y, z)$ сводится к вычислению тройного интеграла

$$m = \iiint_V f(x, y, z) dV.$$

3. Статические моменты тела объёма V , плотность которого в любой точке является функцией координат этой точки $\gamma = f(x, y, z)$ относительно координатных плоскостей Oxy , Oxz и Oyz вычисляются по формулам

$$S_{xy} = \iiint_V z f(x, y, z) dV;$$

$$S_{xz} = \iiint_V y f(x, y, z) dV;$$

$$S_{yz} = \iiint_V xf(x, y, z) dV.$$

4. Момент инерции тела объёма V , плотность γ которого в любой точке есть заданная функция координат этой точки, т.е. $\gamma = f(x, y, z)$ относительно осей координат вычисляется по формулам

$$\gamma_x = \iiint_V (y^2 + z^2) f(x, y, z) dV;$$

$$\gamma_y = \iiint_V (x^2 + z^2) f(x, y, z) dV;$$

$$\gamma_z = \iiint_V (x^2 + y^2) f(x, y, z) dV.$$

5. Координаты центра тяжести тела объёма V определяются формулами

$$x = \frac{S_{yz}}{m} = \frac{\iiint_V xf(x, y, z) dV}{\iiint_V f(x, y, z) dV}; \quad y = \frac{S_{xz}}{m} = \frac{\iiint_V yf(x, y, z) dV}{\iiint_V f(x, y, z) dV}; \quad z = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{\iiint_V zf(x, y, z) dV}{\iiint_V f(x, y, z) dV}.$$

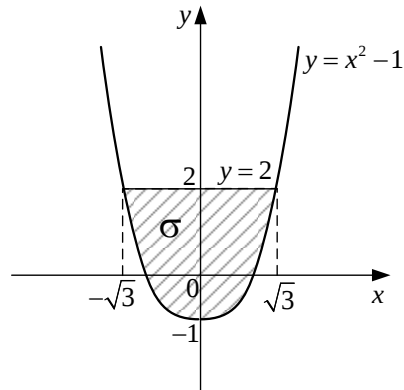
Для однородного тела $f(x, y, z) = 1$ и эти формулы упрощаются.

Решение типовых примеров

Пример9.51 Вычислить площадь плоской области σ , ограниченной прямой $y = 2$ и параболой $y = x^2 - 1$.

Решение

Изобразим область σ и найдём абсциссы точек пересечения прямой и параболы: $x^2 - 1 = 2$, $x^2 = 3$, $x = \pm\sqrt{3}$.

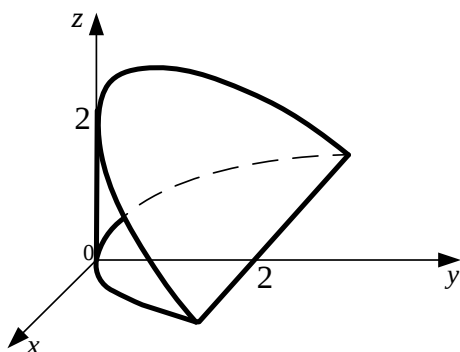


Тогда, по формуле (9.14) получим

$$S = \iint_{\sigma} dx dy =$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2-1}^2 dy = 2 \int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2) dx = 4\sqrt{3} \text{ед}^2.$$

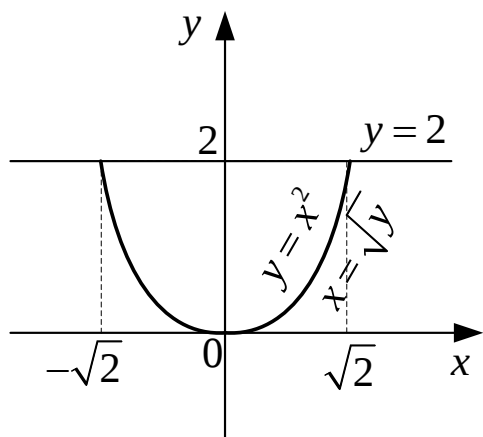
Пример 9.52 Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $z = 2 - y$ и цилиндром $y = x^2$.



Данное тело сверху ограничено плоскостью $z = 2 - y$, поэтому по формуле (9.15), имеем

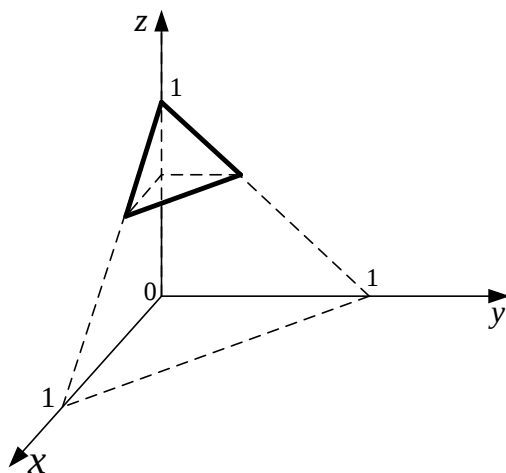
$$V = \iiint_{\sigma} (2 - y) dx dy.$$

Область D - параболический сегмент в плоскости xOy , ограниченный параболой $y = x^2$ и прямой $y = 2$.



$$\begin{aligned} V &= \iint_D (2 - y) dx dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^2 (2 - y) dy = \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^2 (2 - y) dy = -2 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{(2 - y)^2}{2} \Big|_{x^2}^2 dx = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} (2 - x^2)^2 dx = \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 4x^2 + x^4) dx = \\ &= 4x \Big|_0^{\sqrt{2}} - \frac{4}{3} x^3 \Big|_0^{\sqrt{2}} + \frac{x^5}{5} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

Пример 9.53 Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 1$; $z = 0$.



1 способ

$$f_1(x, y) = 1 - x - y;$$

$$z = 1 - x - y$$

$$f_2(x, y) = 0$$

$$z = 0$$

Применяя формулу (9.16), получим

$$V = \iint_{\sigma} (1 - x - y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right) dx = \int_0^1 \left[(1 - x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - x)^2 dx = \frac{1}{6}.$$

$$V = \frac{1}{6} \text{ куб.ед.}$$

2 способ

Воспользуемся формулой (12.20), тогда

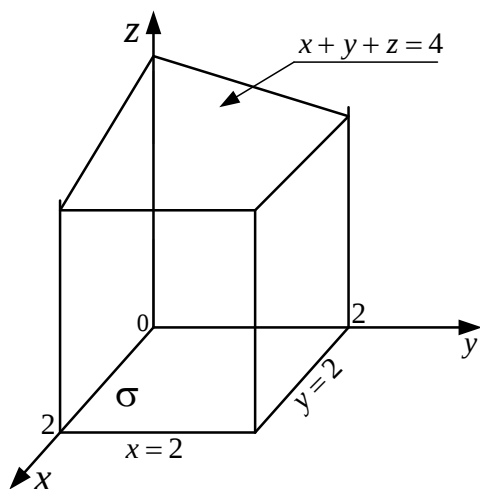
$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} z \Big|_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy =$$

$$= - \int_0^1 \frac{(1 - x - y)^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} dx = - \int_0^1 \left(0 - \frac{(1 - x)^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \frac{(1 - x)^2}{2} dx = - \frac{(1 - x)^3}{6} \Big|_0^1 =$$

$$= 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

$$V = \frac{1}{6} \text{ куб.ед.}$$

Пример 9.54 Вычислить площадь плоскости $x + y + z = 4$ вырезанную плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 2$.



Построим данные плоскости и найдём частные производные функции $z = 4 - x - y$:

$$z'_x = -1, \quad z'_y = -1.$$

По формуле (9.17)

$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy,$$

получим

$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \int_0^2 dx \int_0^2 dy = 4\sqrt{3}.$$

Пример 9.55 Определить массу круглой пластины радиуса R если поверхностная плотность $f(x, y)$ материала пластины в каждой точке $M(x, y)$ равна расстоянию точки (x, y) от центра круга, то есть если $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

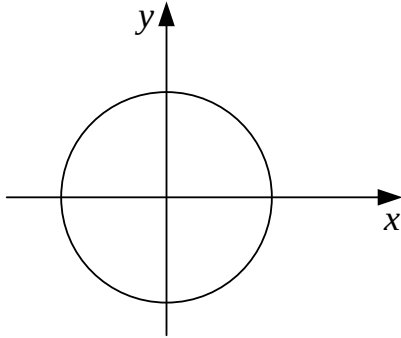
По формуле (9.18) имеем:

$$m = \iint_{\sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Переходя в двойном интеграле к полярным координатам

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi; \\ y &= \rho \sin \varphi; \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho = R, \text{ получим}$$

$$m = \iint_{\sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \rho d\rho = \frac{2\pi}{3} R^3$$



Пример 9.56 Найти координаты центра тяжести однородной пластины, ограниченной параболой $x = y^2$ и прямой $x = 4$.

В силу симметрии фигуры относительно оси Ox имеем $y = 0$.

Для нахождения x центра тяжести найдем m и I_y .

Применяя формулы (9.18) и (9.19), получим

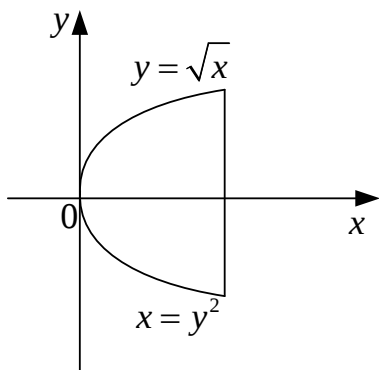
$$\begin{aligned} S_y &= \iint_{\sigma} x dx dy = 2 \int_0^4 x dx \int_0^{\sqrt{x}} dy = 2 \int_0^4 xy \Big|_0^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \\ &= \frac{128}{5} = 25 \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

$$S_x = 8.$$

$$m = \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = 2 \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} dy = \frac{32}{3}$$

Следовательно

$$x = \frac{S_y}{m} = \frac{12}{5}, \quad y = \frac{S_x}{m} = \frac{3}{8}.$$



Задания для решения в аудитории

9.57 Вычислить площадь плоской области σ , ограниченной линиями

а) $y = 2, \quad y = x^2 - 1;$

б) $y = -2, y = x + 2, y = 2, y^2 = x;$

в) $y = (1/a) \cdot (x-a)^2 \quad (a > 0) \quad x^2 + y^2 = a^2;$

- г) $y=0, \quad x=1, \quad y=x^3$;
 д) $\rho = a \cos \varphi, \quad \rho = b \cos \varphi, \quad b > a > 0$;

9.58 Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

- а) $z=0, \quad y+z=2, \quad y=x^2$;
 б) $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x=4, \quad y=4$ и $z=x^2+y^2+1$ (параболоид);
 в) $y=x^2, y=1, x+y+z=4, z=0$;
 г) цилиндрами $z=4-y^2$ и $z=y^2+2$ и плоскостями $x=-1, x=2$;
 д) $x^2+y^2+z^2=r^2$;
 е) цилиндрами $x^2=2y, z=4-y^2$ и плоскостями $x=0, z=0$;
 ж) параболическим цилиндром $2z=y^2$ и плоскостями $2x+3y=12, x=0, z=0$.

9.59 Найти массу квадратной пластинки со стороной $2a$, если плотность

материала пластинки $\rho = \frac{x^2 + y^2}{2a^2}$.

9.760 Найти центр тяжести фигуры, ограниченной двумя параболой:

$y^2 = x$ и $x^2 = y$ ($\rho = 1$ поверхностная плотность массы).

9.61 Определить момент инерции фигуры, ограниченной линиями: $x=1, y=0, y=x^2$ относительно центра O , оси Ox , $\rho = 1$ – поверхностная плотность массы.

9.62 Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной параболой $ax=y^2$ и прямой $x=2$ ($a>0$).

9.63 Найти статический момент однородного прямоугольника со сторонами 5 и 7 относительно меньшей стороны, считая, что прямоугольник лежит в плоскости Oxy .

9.64 Найти массу тела с плотностью $\rho = x + y + z$, ограниченного плоскостями $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

9.65 Определим момент инерции однородной пирамиды ($\rho = 1$) относительно координатной плоскости Oxy , если пирамида ограничена плоскостями $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$.

9.66 Найти координаты центра тяжести призматического тела, ограниченного плоскостями $x=0, z=0, y=1, x=3, y=3, x+2z=3$. (Плотность $\rho = 1$).

9.7 Криволинейные интегралы

9.7.1 Криволинейные интегралы первого рода

Рассмотрим в пространстве XYZ кривую AB , в каждой точке которой определена произвольная функция $f(x, y, z)$.

Определение Если при стремлении к нулю шага разбиения кривой на частичные отрезки существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$, то этот предел называется **криволинейным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по длине дуги AB** или **криволинейным интегралом первого рода**

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds.$$

Для вычисления криволинейного интеграла по длине дуги надо определить его связь с обыкновенным определенным интегралом.

Пусть кривая AB задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, где функции x, y, z – непрерывно дифференцируемые функции параметра t , причем точке A соответствует $t = \alpha$, а точке B соответствует $t = \beta$. Функция $f(x, y, z)$ – непрерывна на всей кривой AB .

Криволинейный интеграл по длине дуги AB будет находиться по формуле:

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \quad (9.21)$$

В случае плоской кривой формула (9.21) упрощается

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (9.22)$$

Если интегрирование производится по длине плоской кривой, заданной уравнением непрерывной и непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функцией $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, то получаем

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + \varphi'^2(x)} dx. \quad (9.23)$$

Если уравнение плоской кривой $\rho = \rho(\varphi)$ задано в полярных координатах ρ, φ , функция $\rho(\varphi)$ и её производная $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$ непрерывны, то имеет место частный случай формулы (9.22), где в качестве параметра t взят полярный угол φ

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi. \quad (9.24)$$

(φ_A и φ_B - значения φ , определяющие на кривой точки A и B).

Решение типовых примеров

Пример 9.67 Вычислить интеграл $\int_{AB} (x^2 + y^2 + z^2) ds$ по одному витку винтовой линии $x = \cos t$; $y = \sin t$; $z = t$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение

Применяя формулу (9.21), получим

$$\begin{aligned} \int_{AB} (x^2 + y^2 + z^2) ds &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = 2\sqrt{2}\pi \left(1 + \frac{4\pi^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Пример 9.68 Вычислить $I = \int_S \frac{dS}{x + 2y + 5}$, где S - отрезок прямой $y = 2x - 2$, заключенный между точками $A(0, -2)$, $B(1, 0)$.

Решение

Находим

$$dS = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + 4} dx = \sqrt{5} dx.$$

Следовательно, по формуле (12.23) будет

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{5} dx}{x + 2(2x - 2) + 5} = \sqrt{5} \int_0^1 \frac{dx}{5x + 1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \ln|5x + 1| \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \ln 6.$$

Пример 9.69 Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl,$$

где L - окружность $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$).

Решение

Введём полярные координаты $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тогда, поскольку $x^2 + y^2 = \rho^2$, уравнение окружности примет вид $\rho^2 = a \rho \cos \varphi$, то есть $\rho = a \cos \varphi$, а дифференциал дуги

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = a d\varphi,$$

при этом $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Следовательно, по формуле (12.24) получим

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos \varphi d\varphi = 2a^2.$$

Пример 9.70 Вычислить криволинейный интеграл первого рода от функции с тремя переменными

$$\int_L (5z - 2\sqrt{x^2 + y^2}) dl,$$

где L - дуга кривой, заданной параметрически $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq \pi$.

Перейдём в подынтегральном выражении к переменной t . Имеем для подынтегральной функции:

$$5z - 2\sqrt{x^2 + y^2} = 5t - 2\sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 3t.$$

Теперь выразим через t дифференциал dl :

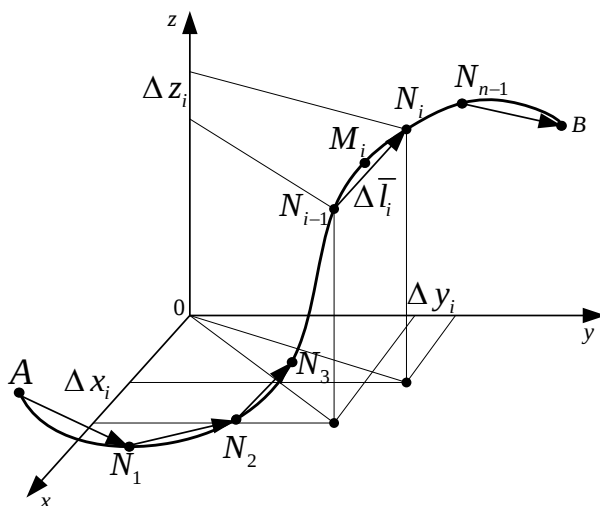
$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt = \\ &= \sqrt{(\cos^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t) + (\sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t) + 1} dt = \\ &= \sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t) + t^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + 1} = \sqrt{2 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Таким образом, по формуле (12.21) имеем

$$\begin{aligned} \int_L (5z - 2\sqrt{x^2 + y^2}) dl &= \int_0^\pi 3t \sqrt{2 + t^2} dt = \int_0^\pi \frac{3}{2} t \sqrt{2 + t^2} d(2 + t^2) = \\ &= (2 + t^2)^{3/2} \Big|_0^\pi = \sqrt{(2 + \pi^2)^3} - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

9.7.2 Криволинейные интегралы второго рода

Криволинейные интегралы второго рода (по координатам). Пусть в пространстве R^3 задан вектор $a = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$, координаты которого – непрерывные функции в точках ориентированной кривой L_{AB} .



Кривую L_{AB} разобьём в направлении от А к В на n элементарных дуг l_i и построим векторы $\Delta \vec{l}_i = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j} + \Delta z_i \vec{k}$, где Δx_i , Δy_i , Δz_i - проекции векторов $\Delta \vec{l}_i$ на оси координат. Начала этих векторов совпадают с началами элементарных дуг l_i , а концы – с их концами (рисунок 9.10). На каждой элементарной части l_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим интегральную сумму

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i) \Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i) \Delta z_i = \\ &= \sum_{i=1}^n a(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta \vec{l}_i. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Предел суммы (12.25), найденный при условии, что все $|\Delta \vec{l}_i| \rightarrow 0$, называется **криволинейным интегралом второго рода** или **криволинейным интегралом по координатам** от вектор-функции $a(x, y, z)$ по кривой L_{AB} и обозначается

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} a(x, y, z) di &= \int_{L_{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ &= \lim_{\Delta \vec{l}_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n a(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta \vec{l}_i \end{aligned} \quad (9.26)$$

Если функции $a = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ непрерывны в точках гладкой кривой L_{AB} , то предел суммы (9.25) существует, то есть существует криволинейный интеграл второго рода (9.26).

Криволинейные интегралы второго рода обладают основными свойствами определённых интегралов (линейность, аддитивность). Непосредственно из определения криволинейного интеграла второго рода следует, например, что он не зависит от направления интегрирования вдоль кривой, то есть меняет знак при изменении ориентации кривой:

$$\int_{L_{AB}} a \cdot dl = - \int_{L_{AB}} a \cdot dl.$$

Если кривая интегрирования L замкнута, криволинейные интегралы второго рода обозначаются $\oint_L a \cdot dl$. В этом случае через кривую L проводится

ориентированная поверхность и за положительное направление обхода по L принимается такое направление, при котором область поверхности, ограниченная кривой L , находится слева, если двигаться вдоль L по выбранной стороне указанной поверхности (то есть обход контура L совершается против хода часовой стрелки).

Если плоскую область D , ограниченную кривой L , разбить на части, не имеющие общих внутренних точек и ограниченные замкнутыми кривыми L_1 и L_2 , то

$$\oint_L a \cdot dl = \oint_{L_1} a \cdot dl + \oint_{L_2} a \cdot dl,$$

где направления обхода по контурам L , L_1 и L_2 - всюду либо положительные, либо отрицательные.

Если гладкая кривая L_{AB} задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции, $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ и $B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ - соответственно начальная и конечная точки этой кривой, то верна следующая формула для вычисления криволинейного интеграла второго рода:

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \\ & + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)) dt. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Если кривая L_{AB} лежит в плоскости Oxy , $a = P(x, y)i + Q(x, y)j$, то $R(x, y, z) = 0$, $z(t) = 0$ и формула (9.27) упрощается:

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Решение типовых примеров

Пример 9.71 Вычислить $I = \int_{L_{AB}} xy dx + (x^2 + y) dy$, если линия L_{AB} - дуга параболы $y = x^2$, расположенными между точками $A(0, 0)$ и $B(2, 4)$.

Решение

Так как в данном случае $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $x \in [0; 2]$, то согласно формуле (9.29), получаем:

$$I = \int_0^2 (xx^2 + (x^2 + x^2) \cdot 2x) dx = \int_0^2 5x^3 dx = \frac{5}{4} x^4 \Big|_0^2 = 20.$$

Пример 9.72 Вычислить $I = \int_{L_{AB}} y dx + (x + z) dy + (x - y) dz$,

где L_{AB} - отрезок прямой, соединяющей точки $A(1, -1, 1)$ и $B(2, 3, 4)$.

Решение

Запишем параметрические уравнения прямой AB : $x=1+t$, $y=-1+4t$, $z=1+3t$. На отрезке $|AB|$ параметр $0 \leq t \leq 1$. Поэтому, согласно формуле (9.27),

$$I = \int_0^1 ((-1+4t) + (2+4t) \cdot 4 + (2-3t) \cdot 3) dt = \int_0^1 (13+11t) dt = 18,5.$$

Пример 9.973 Вычислить $I = \oint_L ydx - x^2 dy + (x+y)dz$, если L - кривая

пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ с плоскостью $x + y - z = 0$, «пробегаемая» в положительном направлении относительно выбранной верхней стороны данной плоскости.

Решение

Найдём параметрические уравнения кривой L . Так как проекция кривой L на плоскость Oxy есть окружность $x^2 + y^2 = 4$, $z=0$, то можно записать, что $x=2\cos t$, $y=2\sin t$. Тогда из уравнения плоскости находим, что $z=2(\cos t + \sin t)$. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} x &= 2\cos t \\ y &= 2\sin t \\ z &= 2(\cos t + \sin t), \quad t \in [0; 2\pi], \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} dx = -2\sin t dt, \\ dy = 2\cos t dt, \\ dz = 2(-\sin t + \cos t) dt. \end{cases}$$

Отсюда по формуле (12.27) имеем:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (-4\sin^2 t - 8\cos^3 t + 4(\cos^2 t + \sin^2 t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 + 2\cos 2t - 8\cos t + 4\sin^2 t \cos t + 4\cos 2t) dt = -4\pi. \end{aligned}$$

9.7.3 Приложения криволинейных интегралов

С помощью криволинейных интегралов первого рода можно вычислять длину дуги кривой, массу материальной дуги, её центр масс, площади цилиндрических поверхностей и другие величины.

Пример 9.74 Вычислить массу m дуги кривой L , заданной уравнениями $x=t^2/2$, $y=t$, $z=t^3/3$, $0 \leq t \leq 2$, если плотность в каждой её точке $\delta = 1 + 4x^2 + y^2$.

Решение

Искомую массу можно определить по формуле

$$m = \int_{L_{AB}} \delta(x, y, z) dl,$$

где $f(x, y, z) = \delta(x, y, z)$ - линейная плотность материальной дуги L_{AB} (механический смысл криволинейного интеграла первого рода).

$$m = \int_L \sqrt{1 + 4x^2 + y^2} dl = \int_0^2 \sqrt{1 + t^4 + t^2} \sqrt{t^2 + 1 + t^4} dt = \int_0^2 (1 + t^2 + t^4) dt = 116/15.$$

Пример 9.75 Вычислить координаты центра масс однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первом квадранте, и моменты инерции I_0 , I_x , I_y .

Координаты центра масс материальной дуги L_{AB} , имеющей линейную плотность $\delta = \delta(x, y, z)$, определяются по формулам:

$$x_C = \frac{1}{m} \int_{L_{AB}} x \delta(x, y, z) dl, \quad y_C = \frac{1}{m} \int_{L_{AB}} y \delta(x, y, z) dl, \quad z_C = \frac{1}{m} \int_{L_{AB}} z \delta(x, y, z) dl,$$

где m - масса дуги L_{AB} .

Решение

Так как прямая $y = x$ является осью симметрии дуги окружности, то $x_C = y_C$. Для нахождения x_C используем первую из формул

$$x_C = \frac{\int_L x \delta dl}{\int_L \delta dl} = \frac{\int_L x dl}{\int_L dl},$$

поскольку $\delta = \text{const}$. Интеграл

$$\int_L dl = \frac{1}{2} \pi R$$

определяет длину четверти рассматриваемой окружности. Вычислим $\int_L x dl$,

где $x = R \cos t$; $y = R \sin t$; $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = R dt.$$

Следовательно,

$$\int_L x dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos t R dt = R^2 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2.$$

Окончательно имеем:

$$x_C = y_C = \frac{R^2}{\pi R/2} = \frac{2R}{\pi}.$$

При вычислении I_0 , I_x , I_y воспользуемся формулами

$$I_0 = \int_{L_{AB}} (x^2 + y^2 + z^2) \delta dl,$$

$$I_x = \int_{L_{AB}} (y^2 + z^2) \delta dl, \quad I_y = \int_{L_{AB}} (x^2 + z^2) \delta dl, \quad I_z = \int_{L_{AB}} (x^2 + y^2) \delta dl,$$

$$I_{xy} = \int_{L_{AB}} z^2 \delta dl, \quad I_{xz} = \int_{L_{AB}} y^2 \delta dl, \quad I_{yz} = \int_{L_{AB}} x^2 \delta dl.$$

[Моменты инерции связаны следующими соотношениями:

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z, \quad I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}.$$

Если дуга L_{AB} лежит в плоскости Oxy , то рассматриваются только моменты I_0 , I_x , I_y (при условии, что $z = 0$),

где $f(x, y, z) = \delta(x, y, z)$ - линейная плотность материальной дуги L_{AB} , и формулой (12.22) для случая плоской дуги ($z \equiv 0$) и учтём, что $I_x = I_y$:

$$I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \delta dl = \delta \int_0^{\pi/2} R^2 R dt = R^3 \delta \pi/2,$$

$$I_x = \int_L y^2 \delta dl = \delta \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 t R dt = \frac{R^3 \delta}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) = \pi R^3 \delta/4.$$

Криволинейный интеграл второго рода (9.25) в случае, когда $a = F$ - сила, под действием которой перемещается тело, определяет работу силы F на пути L_{AB} . В этом заключается *физический смысл криволинейного интеграла второго рода*.

Пример 9.76 Вычислить работу A силы $F = yzi + xzj + xyk$ вдоль отрезка прямой BC , если $B(1,1,1)$ и $C(2,3,4)$.

Решение

Запишем параметрические уравнения прямой BC : $x=1+t$, $y=1+2t$, $z=1+3t$, где $0 \leq t \leq 1$. Тогда работа A силы F на пути BC вычисляется по формуле

$$A = \int_{L_{BC}} yzdx + xzdy + xydz =$$

$$= \int_0^1 (1+2t)(1+3t)dt + (1+t)(1+3t) \cdot 2dt + (1+t)(1+2t) \cdot 3dt =$$

$$= \int_0^1 (18t^2 + 22t + 6)dt = 23.$$

Теорема (Грина) Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные в замкнутой односвязной области D , лежащей в плоскости Oxy и ограниченной кусочно-гладкой кривой L , то

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (9.30)$$

где интегрирование по контуру L выполняется в положительном направлении.

Формула (12.30) называется *формулой Грина*.

Если в некоторой области D выполнены условия теоремы Грина, то равносильны приведённые ниже утверждения.

1. $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, если L – любой замкнутый контур L ,

расположенный в области D .

2. Интеграл $\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования,

соединяющего точки A и B , где $L_{AB} \in D$.

3. $Pdx + Qdy = du(x, y)$, где $du(x, y)$ – полный дифференциал функции $u(x, y)$.

4. Во всех точках области D справедливо равенство

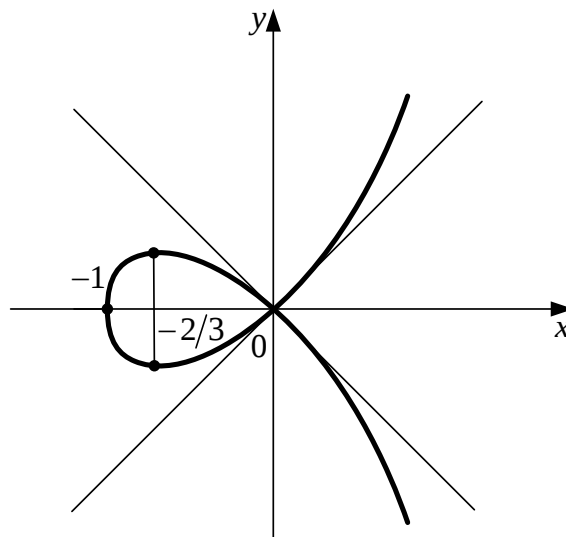
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (9.31)$$

Из формулы Грина следует, что площадь S области D можно также вычислить с помощью криволинейного интеграла второго рода:

$$S_D = \frac{1}{2} \oint_L -ydx + xdy,$$

где интегрирование по контуру L производится в положительном направлении.

Пример 9.77 Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлёй кривой $x^3 + x^2 - y^2 = 0$.



Из уравнения кривой получим, что $y = \pm x\sqrt{x+1}$, то есть кривая симметрична относительно оси Ox и пересекает её в точках $x=0$ и $x=-1$; обе функции $y = \pm x\sqrt{x+1}$ определены при $x \geq -1$, а $y \rightarrow \pm\infty$ при $x \rightarrow \infty$. Перейдём к параметрическим уравнениям данной кривой, положив $y = xt$. Подставив

$y = xt$ в уравнение $x^3 + x^2 - y^2 = 0$, получим $x^3 + x^2 = x^2 t^2$, $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - 1$, где для петли $-1 \leq t \leq 1$.

Следовательно, искомая площадь

$$S = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(-(t^3 - t) \cdot 2t + (t^2 - 1)(3t^2 - 1) \right) dt = \int_0^1 (t^4 - 2t^2 + 1) dt = \frac{8}{15}.$$

Пример 9.78 Вычислить

$$I = \oint_L y(1 - x^2) dx + (1 + y^2) x dy,$$

где контур L – окружность $x^2 + y^2 = 4$, «пробегаемая» в положительном направлении обхода.

Решение

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой Грина (12.30):

$$I = \iint_D (1 + y^2 - 1 + x^2) dx dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

где D – круг, определяемый неравенством $x^2 + y^2 \leq 4$. Имеем:

$$\begin{aligned} I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \left| \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi, \quad dx dy = \rho d\rho d\varphi, \\ y = \rho \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 2 \end{array} \right| = \\ &= \iint_{D'} \rho^3 d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 8\pi. \end{aligned}$$

С помощью теории криволинейных интегралов второго рода можно решить следующую задачу. Известно дифференциальное выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, которое является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Требуется найти эту функцию.

Решение данной задачи определяется формулой

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C \quad (9.32)$$

или

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C, \quad (9.33)$$

где точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ принадлежат области D , в которой $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные являются непрерывными функциями; C – произвольная постоянная.

Пример 9.79 Показать, что дифференциальное выражение

$$\frac{x}{y} dy + \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} + \ln y \right) dx$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, и найти эту функцию.

Решение

Так как

$$P(x, y) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} + \ln y, \quad Q(x, y) = \frac{x}{y},$$

то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y}$. Значит, во всех точках плоскости Oxy , исключая точки, лежащие на осях координат, данное дифференциальное выражение в силу равенства (9.30) является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Теперь воспользуемся общей формулой (9.32) или (9.33), где можно взять $M_0(1, 1)$.

По формуле (12.32) имеем:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_1^x \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} \right) dx + \int_1^y \frac{x}{y} dy + C = \\ &= (\arctg x - \ln|x|) \Big|_1^x + x \ln|y| \Big|_1^y + C = \arctg x - \ln|x| + x \ln|y| + C, \end{aligned}$$

где C – произвольная постоянная.

Задания для решения в аудитории

9.80 Вычислить $\int_{AB} x^2 y dS$, где (AB) – часть окружности $x^2 + y^2 = R^2$,

лежащей в первой четверти.

9.81 $\int_Z \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, Z – отрезок прямой OA : $O(0, 0)$, $A(1, 2)$.

9.82 Вычислить $\int_L \sqrt{y^2 + x^2} dS$, где L – контур окружности

а) $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$);

б) $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \cos t \end{cases}$ по дуге окружности (I четверть).

9.83 Вычислить $\int_L \frac{dl}{x-y}$, если L - отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$,

заключенный между точками $A(0, -2)$ и $B(4, 0)$.

9.84 Вычислить $\oint_L xydl$, если L - контур прямоугольника с вершинами

в точках $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$, $D(0, 2)$.

9.85 Вычислить $\int_L \sqrt{2y}dl$, если L - первая арка циклоиды

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$).

9.86 Вычислить $\int_L xyzdl$, если L - отрезок прямой между точками

$A(1, 0, 1)$ и $B(2, 2, 3)$.

9.87 Вычислить $\int_L (xy - 1)dx + x^2ydy$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 2)$

а) по прямой AB ;

б) по контуру треугольника ABO ;

в) по дуге параболы $4x + y^2 = 4$;

г) по дуге эллипса $x = \cos t$ $y = 2 \sin t$.

9.88 Вычислить $\oint_{(C)} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy$, если C - контур

треугольника с вершинами в точках $A(1, 1)$ $B(2, 2)$ $C(1, 3)$, пробегаемый против часовой стрелки

а) по ломанной со звеньями AB , BC , CA ;

б) по формуле Грина.

9.89 $\int_{(L)} (x^2 - 2yx)dx + (y^2 - 2xy)dy$, L - дуга параболы $y = x^2$,

пробегаемая от $A(-1; 1)$ до $B(1; 1)$.

9.90 Выяснить, будет ли криволинейный интеграл

$I = \int_{AB} (6xy + 4y^2 + 5y)dx + (3x^2 + 8xy + 5x)dy$ зависеть от формы пути интегриро-

вания. Вычислить этот интеграл по прямой OA , где $A(2; 3)$.

9.91 Будет ли криволинейный интеграл $\oint_L \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx - \frac{2y}{x^3} dy$,

взятый по замкнутому контуру равен нулю.

9.92 Вычислить $\int_L yz dx + zx dy + xy dz$, где L - длина винтовой линии

$x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = at/(2\pi)$ от точки её пересечения с плоскостью $z = a$.

9.93 Вычислить $\int_{L_{AB}} xy dx + (y - x) dy$, если линия L_{AB} , соединяющая

точки $A(0,0)$ и $B(1,1)$, задана уравнением

а) $y = x$;

б) $y = x^2$

в) $y^2 = x$

г) $y = x^3$.

9.94 Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2 - \frac{t^4}{4}; \\ y = \frac{t^6}{6} \end{cases}$ между точками пересечения

ее с осями координат.

9.95 Найти массу дуги OA : $O(0,0)$ $A(4,16/3)$ кривой $3y = 2x\sqrt{x}$, если в каждой ее точке линейная плотность равна абсциссе точки, то есть $\delta = x$.

9.96 Найти массу четверти эллипса $x = \cos t$, $z = \sin t$, расположенной в первом квадранте плоскости xOz , если линейная плотность массы $\delta = z$.

9.97 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$, $x = y^2$, $8xy = 1$ (площадь, примыкающая к началу координат).

9.98 Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

9.99 Найти работу силы $F = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ при перемещении точки массы m из начала координат в точку $A(1,1)$

а) по прямой $y = x$;

б) по прямой $y = x^2$.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1 РЯДЫ

Вариант 1

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 + 3n + 1}{8n^2 - 2n + 3}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}.$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-2)}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{(n+1)^2}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 2, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{5n-28} \right)^n.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3n+1} \right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}.$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (5n-1)}{5n+3}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Вариант 3

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5 - n^3 + 1}}{\sqrt[4]{n^6 + 2n^4 + 2}}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln^n(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$.

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}{5^n}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi.$$

Вариант 4

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^{15} - 4n^3 + 5}{8 - 6n^5 - 3n^{10}}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \sqrt[3]{n}}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^n}{n}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = x^2, \quad -1 < x < 1.$$

Вариант 5

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2n + 2}.$$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = x^3, \quad -\pi < x < \pi.$$

Вариант 6

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^4 + 2n^2 + 1}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{e} \right)^n; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}.$$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0, \\ 3, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Вариант 7

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n-1)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n-1} \right)^n; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{n}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 (x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 2, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Вариант 8

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2+1}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+2)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n+4)^n}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{1+n^2}.$$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+9} \right).$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^n}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{x^2}{2}, \quad -3 \leq x \leq 3.$$

Вариант 9

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 - 1}}{n + 1}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \right)^{n^2} \frac{1}{2^n}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin^n \frac{2}{n}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1) \cdot 5^n}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Вариант 10

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n+2}}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+3}}{5^{n+1}}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)}.$$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot \ln^2 n}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3 (x+3)^{2n}}{2n+3}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -5 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 5. \end{cases}$$

Вариант 11

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^{-1}}{n^{-1}}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!4^n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 9}.$$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2}{2n^2 + 5}\right).$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{2n}}{2n}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{|x|}{3}, \quad -3 \leq x \leq 3.$$

Вариант 12

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2 - 1)}{n!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{1}{n}}.$$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{2^n}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 9^n}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = 2 - x, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Вариант 13

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^3 - 1}{2n^3 + 1}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n} \cdot n!}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n-6} \right)^{\frac{n}{2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}}.$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{7n-1}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = 2 - x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Вариант 14

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2n}}{\sqrt[3]{n^2 - 1}}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+4} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2 + 3n + 4}.$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n-4}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n (2n-1)}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} 10, & -10 \leq x < 0, \\ 10 - x, & 0 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

Вариант 15

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n+1}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n+2}{n} \right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4+n^2}.$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5n}{e^{5n}}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1) \cdot 2^n}.$$

5. Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x) = 4 - x, \quad -4 \leq x \leq 4.$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задание

1. Восстановить оригинал по данному изображению.
2. Найти частное решение дифференциального уравнения операционным методом.
3. Решить систему дифференциальных уравнений, применяя операционный метод.

Варианты заданий

№ 1 1. $F(p) = \frac{p+3}{p^2-2p+5}$. 2. $x'' + 9x = 1$, если $x(0) = x'(0) = 0$. 3. $\begin{cases} x' - x - 3y = 2, \\ y' - x + y = 1, \end{cases}$ если $x(0) = -1, y(0) = 2$.	№ 2 1. $F(p) = \frac{1}{p^3-8}$. 2. $x'' - x' - 6x = 2$, если $x(0) = 1, x'(0) = 0$. 3. $\begin{cases} x' - 2x - 5y = 0, \\ y' - x + 2y = 2, \end{cases}$ если $x(0) = y(0) = 1$.
№ 3 1. $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2-4)}$. 2. $y'' + 9y = e^{3t}$, если $y(0) = y'(0) = 0$. 3. $\begin{cases} x' + 3x + 4y = 1, \\ y' - 2x - 3y = 0, \end{cases}$ если $x(0) = 0, y(0) = 2$.	№ 4 1. $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)^2}$. 2. $x'' - 4x' + 3x = 3$, если $x(0) = 1, x'(0) = 2$. 3. $\begin{cases} x' - x - 2y = 1, \\ y' - 4x + y = 0, \end{cases}$ если $x(0) = 0, y(0) = 1$.
№ 5 1. $F(p) = \frac{p+1}{p(p-1)(p-2)}$. 2. $x'' + 4x = \sin 3t$, если $x(0) = x'(0) = 0$.	№ 6 1. $F(p) = \frac{3p-1}{(p-1)(p+1)(p+2)}$. 2. $y'' - 2y' + y = e^{2t}$, если $y(0) = y'(0) = 0$.

3. $\begin{cases} y' - x - y = 0, \\ x' + x - 3y = 1, \end{cases}$ если $x(0)=1, y(0)=2$.	3. $\begin{cases} x' + 2x - 6y = 1, \\ y' - 2x - 2y = 0, \end{cases}$ если $x(0)=0, y(0)=1$.
№ 7 1. $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)}$. 2. $x'' - 9x = 2 - t$, если $x(0)=0, x'(0)=1$. 3. $\begin{cases} x' - 3x - y = 0, \\ y' + 5x + 3y = 2, \end{cases}$ если $x(0)=2, y(0)=0$.	№ 8 1. $F(p) = \frac{3}{(p-2)^2(p-1)}$. 2. $y'' + 3y' = 9t$, если $y(0)=y'(0)=0$. 3. $\begin{cases} y' - x - 2y = 1, \\ x' + 2x - 5y = 1, \end{cases}$ если $x(0)=0, y(0)=2$.
№ 9 1. $F(p) = \frac{p+8}{p^2+12p+37}$. 2. $x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}$, если $x(0)=x'(0)=0$. 3. $\begin{cases} x' - 2x - 3y = 1, \\ y' - 4x + 2y = 0, \end{cases}$ если $x(0)=-1, y(0)=0$.	№ 10 1. $F(p) = \frac{3p+1}{p^2-1}$. 2. $y'' - 4y = 4t$, если $y(0)=1, y'(0)=0$. 3. $\begin{cases} x' - x - 4y = 0, \\ y' - 2x + y = 9, \end{cases}$ если $x(0)=1, y(0)=0$.
№ 11 1. $F(p) = \frac{p+7}{p^2+12p+40}$. 2. $x'' - 3x' + 2x = e^{5t}$, если $x(0)=1, x'(0)=2$. 3. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$ если $x(0)=0, y(0)=5$.	№ 12 1. $F(p) = \frac{3p+4}{p^2+2p-3}$. 2. $y'' + 2y' + y = 0$, если $y(0)=1, y'(0)=-2$. 3. $\begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = -4x, \end{cases}$ если $x(0)=3, y(0)=1$.

№ 13 1. $F(p) = \frac{2p^2 - 3p + 4}{(p-1)^2(p+2)}.$ 2. $y'' + 4y' + 5y = 0,$ если $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$ 3. $\begin{cases} x' + x + 2y = 1, \\ y' + 1,5x - y = 0, \end{cases}$ если $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$	№ 14 1. $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2-9)}.$ 2. $y'' - y' = 1,$ если $y(0) = y'(0) = -1.$ 3. $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, \\ y' = 3x + y + 1, \end{cases}$ если $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$
№ 15 1. $F(p) = \frac{p+3}{p(p-1)(p-3)}.$ 2. $y'' + y' - 2y = e^t,$ если $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$ 3. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 2,5x - y + 2, \end{cases}$ если $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$	№ 16 1. $F(p) = \frac{p+5}{p^2+12p+37}.$ 2. $y'' - y' = 2\sin t,$ если $y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$ 3. $\begin{cases} x' = 2y + 1, \\ y' = 2x + 3, \end{cases}$ если $x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$
№ 17 1. $F(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+3)}.$ 2. $y'' - 5y' + 4y = 4,$ если $y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$ 3. $\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1, \\ y' = 3x + 4y, \end{cases}$ если $x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$	№ 18 1. $F(p) = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)}.$ 2. $y'' + 2y' = -2,$ если $y(0) = y'(0) = 0.$ 3. $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, \\ y' = 4y + 1, \end{cases}$ если $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

№ 19 1. $F(p) = \frac{1}{(p^2 - 3p + 2)(p - 3)}.$ 2. $y'' + 4y' + 4 = 4,$ если $y(0) = 1, \quad y'(0) = -4.$ 3. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x + y + 1, \end{cases}$ если $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$	№ 20 1. $F(p) = \frac{3}{(p - 1)^2(p - 2)}.$ 2. $y'' - 2y' + y = 4,$ если $y(0) = 4, \quad y'(0) = 2.$ 3. $\begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = -3x, \end{cases}$ если $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
№ 21 1. $F(p) = \frac{p + 5}{p^2 + 12p + 40}.$ 2. $x'' + 8x' = 8t,$ если $y(0) = y'(0) = 0.$ 3. $\begin{cases} x' = 3y + 2, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$ если $x(0) = -1, \quad y(0) = 1.$	№ 22 1. $F(p) = \frac{1}{(p + 1)(p - 3)^2}.$ 2. $y'' - 5y' + 6y = t,$ если $y(0) = y'(0) = 0.$ 3. $\begin{cases} x' = x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$ если $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
№ 23 1. $F(p) = \frac{1}{p^3 - 27}.$ 2. $y'' + y = 2e^t,$ если $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$ 3. $\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x + 3y + 1, \end{cases}$ если $x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$	№ 24 1. $F(p) = \frac{1}{(p + 1)^2(p + 3)^2}.$ 2. $y'' - y' - 2y = 4t,$ если $y(0) = y'(0) = 0.$ 3. $\begin{cases} x' + 2x - y = 2, \\ y' + 3x = 0, \end{cases}$ если $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

№ 25 1. $F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 9)}$. 2. $y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y(0) = 1, y'(0) = 2$. 3. $\begin{cases} x' = 4x + 3, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$ если $x(0) = -1, y(0) = 0$.	№ 26 1. $F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}$. 2. $x'' + 9x = 10$, если $x(0) = x'(0) = 0$. 3. $\begin{cases} x' - y = 3, \\ y' - x = 2, \end{cases}$ если $x(0) = 1, y(0) = 0$.
№ 27 1. $F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p^2 + p - 2)}$. 2. $y'' + 6y' = 12t + 2$, если $y(0) = y'(0) = 0$. 3. $\begin{cases} x' = x + 3y + 3, \\ y' = x - y + 1, \end{cases}$ если $x(0) = 0, y(0) = 1$.	№ 28 1. $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p-2)(p+3)}$. 2. $x'' + 2x' = -2$, если $x(0) = x'(0) = 0$. 3. $\begin{cases} x' + x - 3y = 2, \\ y' - x - y = 1, \end{cases}$ если $x(0) = 0, y(0) = 1$.
№ 29 1. $F(p) = \frac{3}{(p-2)(p^2 - 2p + 1)}$. 2. $y'' + y = 2\cos t$, если $y(0) = -1, y'(0) = 1$. 3. $\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0, \end{cases}$ если $x(0) = 3, y(0) = 15$.	№ 30 1. $F(p) = \frac{1}{p^3 - 64}$. 2. $y'' + y' = t^2 + 2t$, если $y(0) = 4, y'(0) = -2$. 3. $\begin{cases} x' + 7x - y = 0, \\ y' + 2x + 5y = 0, \end{cases}$ если $x(0) = y(0) = 1$.

№ 31 1. $F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)p}$. 2. $y'' - 2y' + 2y = 2$, если $y(0) = 1, y'(0) = 0$. 3. $\begin{cases} x' + x - 2y = 0, \\ y' + x + 4y = 0, \end{cases}$ если $x(0) = y(0) = 1$.	№ 32 1. $F(p) = \frac{5p^2 - 4p - 1}{p(p+1)(p-3)}$. 2. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2t}$, если $y(0) = y'(0) = 1$. 3. $\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' - x + y = e^t, \end{cases}$ если $x(0) = y(0) = 1$.
№ 33 1. $F(p) = \frac{p}{(p+3)(p^2 + 3p + 2)}$. 2. $y'' + y = e^{-t} + 2$, если $y(0) = y'(0) = 0$. 3. $\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t, \end{cases}$ если $x(0) = y(0) = 0$.	№ 34 1. $F(p) = \frac{10p + 2}{p(p^2 - 2p - 3)}$. 2. $y'' + 3y' + 2y = 2t^2 + 1$, если $y(0) = 4, y'(0) = -3$. 3. $\begin{cases} x' + y - 2x = 0, \\ y' - 2y + x = -5e^t \sin t, \end{cases}$ если $x(0) = 2, y(0) = 3$.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №3
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ

Вариант 1

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f(x, y) dx.$$

2 Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (54x^2y^2 + 150x^4y^4) dx dy$ $\sigma: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x};$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 y) dy;$

в) $\iiint_V x dx dy dz, V: y=10x, y=0, x=1, z=xy, z=0.$

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x+y) dx - (x-y) dy \text{ вдоль ломаной } OAB, O(0;0), A(2;0), B(4;5);$$

Вариант 2

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx.$$

2 Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (9x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy$ $\sigma: x=1, y=-x^2, y=\sqrt{x};$

б) $\int_1^2 dx \int_x^{x^2} (2x-y) dy;$

в) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8}\right)^4}, V: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1, y=0, x=0, z=0.$

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L y dx - (y+x^2) dy, \text{ где } L \text{ дуга кривой } y=2x-x^2, \text{ расположенная выше оси } OX.$$

Вариант 3

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx.$$

2. Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (36x^2y^2 - 96x^3y^3) dx dy$ $\sigma: x=1, y=-x^3, y=\sqrt[3]{x};$

б) $\int_2^3 dx \int_x^{2x} (x+2y) dy;$

в) $\iiint_V 15(x^2 + z^2) dx dy dz, \quad V: x+y=1, y=0, x=0, z=x+y, z=0.$

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{y^2+1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy \text{ вдоль отрезка } AB, \quad A(1;2), \quad B(2;4);$$

Вариант 4

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx.$$

2. Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$ $\sigma: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x};$

б) $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x+\sin y} \cos y dy;$

в) $\iiint_V (3x+4y) dx dy dz, \quad V: y=x, y=0, x=1, z=5(x^2+y^2), z=0.$

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_C y dx - \frac{x}{y} dy, \text{ где } C - \text{ дуга кривой } y=e^{-x} \text{ от } A(0;1) \text{ до } B(-1;e);$$

Вариант 5

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f(x, y) dy.$$

2 Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy, \quad \sigma: \quad x=1, \quad y=x^2, \quad y=-\sqrt[3]{x};$

б) $\int_0^2 dy \int_0^{y^2} (3x^2 - 2xy + y) dx;$

в) $\iiint_V (1 + 2x^3) dx dy dz, \quad V: \quad y=9x^2, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0.$

3. Вычислить криволинейный интеграл

$\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y) dy$ вдоль линии $L: y = x$ от $A(1;1)$ до $B(2;2)$;

Вариант 6

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\arcsin y} f(x, y) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f(x, y) dx.$$

2 Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy \quad \sigma: \quad x=1, \quad y=x^3, \quad y=-\sqrt{x};$

б) $\int_1^2 dy \int_0^y (x^2 + y^2) dx;$

в) $\iiint_V (27 + 54y^3) dx dy dz, \quad V: \quad y=x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0.$

3. Вычислить криволинейный интеграл

$\int_L x dy - y dx$ вдоль астроида $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$, совершая обход против часовой стрелки;

Вариант 7

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f(x, y) dx.$$

2 Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$, $\sigma: x=1, y=-x^2, y=\sqrt[3]{x}$;

б) $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} x(1-y) dy$;

в) $\iiint_V y dx dy dz$, $V: y=15x, y=0, z=xy, x=1, z=0$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x^2 - 2y) dx + (y^2 - 2xy) dy \text{ вдоль кривой } y = x^2 \text{ от } A(-1;1) \text{ до } B(1;1);$$

Вариант 8

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x, y) dx.$$

2 Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (4xy + 3x^2y^2) dx dy$, $\sigma: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}$;

б) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} (x+2) dy$;

в) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3}\right)^5}$, $V: \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1, y=0, x=0, z=0$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x^2 - y^2) dx + xy dy, \quad L - \text{прямая } AB, \text{ где } A(1;1), B(3;4);$$

Вариант 9

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

2. Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy$ $\sigma: x=1, y=-x^3, y=\sqrt{x};$

б) $\int_0^1 dx \int_{2-x}^{x^2+2} (3xy+1) dy;$

в) $\iiint_V (3x^2 + y^2) dx dy dz, \quad V: x+y=1, y=0, x=0, z=10y, z=0.$

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{OB} (x^2 - y) dx + (y^2 - x) dy, \quad OB - \text{отрезок прямой от } O(0;0) \text{ до } B(3;4);$$

Вариант 10

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x, y) dy.$$

2. Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (8xy + 9x^2y^2) dx dy, \quad \sigma: x=1, y=-x^3, y=\sqrt[3]{x};$

б) $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} (2 + y^2) dy;$

в) $\iiint_V (15x + 30z) dx dy dz, \quad V: y=x, y=0, x=1, z=x^2+3y^2, z=0.$

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (xy - x^2) dx + x dy \text{ вдоль линии } L: y=2x^2 \text{ от } O(0;0) \text{ до } B(1;2);$$

Вариант 11

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x, y) dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y) dy.$$

2. Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (12xy + 9x^2y^2) dx dy, \quad \sigma: \quad x=1, \quad y=-x^2, \quad y=\sqrt{x};$

б) $\int_0^{\frac{2}{3}} dy \int_{2y^2}^{y+3} (x-y) dx;$

в) $\iiint_V (4+8z^3) dx dy dz, \quad V: \quad y=x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0.$

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (3x^2y + 1) dx + (x^3 - 4) dy, \quad L - \text{отрезок прямой от } A(1;2) \text{ до } B(3;6);$$

Вариант 12

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^{3\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx.$$

2. Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (24xy + 18x^2y^2) dx dy, \quad \sigma: \quad x=1, \quad y=x^3, \quad y=-\sqrt[3]{x};$

б) $\int_1^3 dx \int_3^6 \frac{dy}{\sqrt{x+y}};$

в) $\iiint_V (1+2x^3) dx dy dz, \quad V: \quad y=36x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0.$

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x+y) dx - y dy, \quad L - \text{контур треугольника, образованного осями координат и}$$

прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1;$

Вариант 13

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f(x, y) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f(x, y) dx.$$

2. Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (12xy + 27x^2y^2) dx dy$, $\sigma: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$;

б) $\int_0^{2\pi} dx \int_0^a y^2 \sin^2 x dy$;

в) $\iiint_V 21xz dx dy dz$, $V: y=x, y=0, x=2, z=xy, z=0$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$\int_L \sin y dx + \sin x dy$ вдоль прямой L от $A(0;\pi)$ до $B(\pi;0)$;

Вариант 14

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^0 f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f(x, y) dy.$$

2. Вычислить

а) $\iint_{\sigma} (8xy + 18x^2y^2) dx dy$, $\sigma: x=1, y=-x^2, y=\sqrt[3]{x}$;

б) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x (xy^2 + y) dy$;

в) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3}\right)^6}$, $V: \frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1, y=0, x=0, z=0$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$\int_{AB} \frac{y}{x} dx + x dy$ вдоль кривой $y = \ln x$ от $A(1;0)$ до $B(e;1)$;

Вариант 15

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x, y) dx.$$

2. Вычислить

а) $\iint_{\sigma} \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2 \right) dx dy, \quad \sigma: \quad x=1, \quad y=x^3, \quad y=-\sqrt{x};$

б) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} \left(\frac{1}{4}xy^2 - 2y \right) dy;$

в) $\iiint_V (x^2 + 3y^2) dx dy dz, \quad V: \quad x+y=1, \quad y=0, \quad x=0, \quad z=10x, \quad z=0.$

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L x dy - y dx, \text{ вдоль циклоиды } \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \text{ от } A(2\pi a; 0) \text{ до } B(0; 0)$$

Оглавление

ГЛАВА 7 РЯДЫ

7.1 Числовые ряды.....	2
7.2 Знакопеременные ряды	10
7.3 Знакопеременные ряды.....	12
7.4 Функциональные ряды.....	15
7.5 Степенные ряды.....	17
7.6 Ряды Тейлора и Маклорена.....	20
7.7 Некоторые приложения степенных рядов.....	24
7.7.1 Вычисление значений функции.....	24
7.7.2 Вычисление определенных интегралов.....	26
7.7.3 Применение рядов к решению дифференциальных уравнений...	27
7.8 Ряды Фурье.....	30

ГЛАВА 8 ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

8.1 Преобразование Лапласа	39
8.2 Нахождение оригиналов и изображений с использованием теорем....	44
8.3 Решение дифференциальных уравнений операционным методом....	48
8.4 Решение систем дифференциальных уравнений операционным методом.....	52
8.5 Приложения операционного исчисления.....	55
8.5.1 Решение задач прикладной механики.....	55
8.5.2 Решение прикладных задач теории электрических цепей.....	57

ГЛАВА 9 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

9.1 Двойной интеграл.....	62
9.2 Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах.....	63
9.3 Замена переменных в двойном интеграле.....	71
9.3.1 Общий случай.....	71
9.3.2 Вычисление двойных интегралов в полярной системе координат.....	74
9.4 Тройной интеграл.....	79
9.4.1 Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.....	79
9.5 Замена переменных в тройном интеграле.....	81
9.5.1 Переход к цилиндрическим координатам.....	81
9.5.2 Переход к сферическим координатам.....	84
9.6 Приложения кратных интегралов.....	86
9.6.1 Приложения двойных интегралов.....	86
9.6.2 Приложения тройных интегралов.....	88
9.7 Криволинейные интегралы.....	94

9.7.1 Криволинейные интегралы первого рода.....	94
9.7.2 Криволинейные интегралы второго рода.....	96
9.7.3 Приложения криволинейных интегралов.....	99
РАСЧЕТНОГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1 Ряды.....	107
РАСЧЕТНОГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №2 Операционное исчисление.....	115
РАСЧЕТНОГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №3 Интегральное исчисление ФНП.....	121